Siligo(SS)	I	1	2	**3**	**4**	**5**	1	2	3	Maria Giovanna Murruzzu

Commenti dell'insegnante di classe
Commenti dell'E-tutor Giancarlo Navarra

18 aprile 2013 — 1 (*Uso del registratore*)

Parole Chiave

OPACO TRASPARENTE, FORMA CANONICA NON CANONICA,CONDIVISIONE, ARGOMENTAZIONE, GENERALIZZAZIONE

LA CLASSE IN REALTÀ È UNA PLURICLASSE COMPOSTA DA 4 ALUNNI DI TERZA, 7 DI QUARTA E 4 DI QUINTA TRA CUI UNA ALUNNA DIVERSAMENTE ABILE. QUEST'ANNO SCOLASTICO HO INIZIATO CON LORO, E ANCHE CON L'ALTRA PLURICLASSE, FORMATA DAGLI ALUNNI DI PRIMA E DI SECONDA, ALCUNE ATTIVITÀ ARAL CHE SONO STATE ACCOLTE IN MODO POSITIVO. I BAMBINI DIMOSTRANO ENTUSIASMO E PARTECIPAZIONE, FATTA ECCEZIONE PER QUALCUNO CHE ANCHE NELLA ATTIVITÀ SEGUENTE NON INTERVIENE QUASI MAI, NEMMENO SE SOLLECITATO. LA LEZIONE DURA CIRCA UN'ORA E A MIO AVVISO SI ARRIVA A SCOPERTE INTERESSANTI.

1. *Si presenta la seguente mini piramide alla lavagna e chiedo agli alunni di descriverla:*

	57	
24		35

2. I: Bambini vi ricordate cos'è questa che ho disegnato alla lavagna?
3. Tutti: Una mini piramide!
4. I: *Rivolgendomi alla classe*. Siamo tutti d'accordo che è una mini piramide? C'è qualcuno che pensa sia un'altra cosa? Ho sentito che qualcuno diceva piramide (*qualcuno confusamente dice piramide…*[1])
5. Tutti: No, è una mini piramide.
6. I: Volete descrivere questa mini piramide?
7. Francesco: Ha i due numeri alla base che formano il risultato che è... eh... sopra.
8. I: Chi vuole aggiungere o dire altro?
9. Danilo: Eh... eh... la mini piramide è formata da quei numeri che sono alla base che formano il numero... il numero che è alla punta.[2]
10. Francesco: Addizionando i numeri alla base si ha come risultato il numero sulla punta.
11. Giammario: Bisogna addizionare, i numeri che sono alla base formano il numero soprastante.
12. Luca: Se addizioni i numeri che sono alla base si forma il numero che si trova alla superficie.
13. I: Quindi avete parlato sempre di somma, perché avete detto "addizioniamo" quindi vi ricordate che l'altra volta anche il prof. Navarra aveva sottolineato il fatto che è meglio usare la parola 'somma' e non 'risultato'. Quindi possiamo dire che i numeri alla base...
14. Vincenzo: … sono gli addendi che formano il numero alla… formano il risultato alla punta[3].
15. I: Che numero c'è in alto?
16. Tutti: 57.
17. I: 57 è...?
18. Tutti : … la somma di 24 e 33.
19. I: Siamo d'accordo tutti?

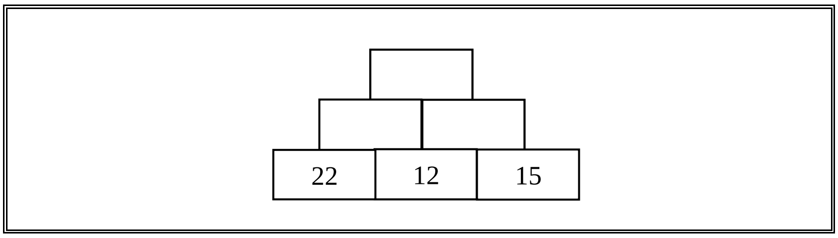
---

[1] *In realtà va bene pure 'piramide', anche se 'minipiramide' specifica l'ambiente in modo più dettagliato; in casi come questo è comunque piuttosto semplice accordarsi con la classe sull'uso di un termine piuttosto che sull'altro.*

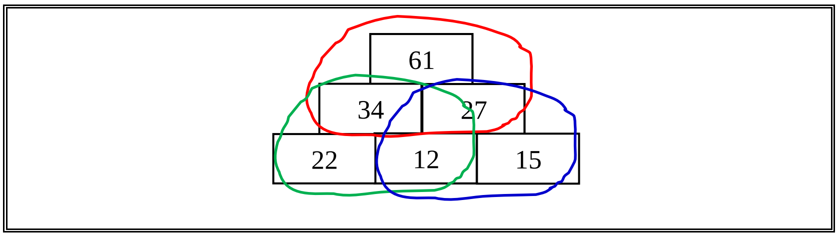
[2] *Il linguaggio usato dai bambini è molto impreciso, ma io aspetto e non correggo.*

[3] *Nonostante tutto continuano a usare termini imprecisi. Probabilmente l'insegnante è intervenuta troppo 'timidamente' sulla terminologia, e quindi gli alunni proseguono con quella che stanno usando. Avrebbe potuto chiedere, dopo l'intervento di Danilo (9), se qualcuno aveva da suggerire un termine diverso da 'punta'; ha ritenuto di non farlo nemmeno la seconda volta che esso compare (14) – sperando forse nell'intervento di qualche compagno – e quindi quello che accade è molto normale. Suggerisco la lettura dei suggerimenti che diamo nelle FAQ in rete (riprese dall'Unità 12) sulla gestione delle discussioni in classe.*

20. Tutti : Sì!!![4]
21. I: Ora, bambini vi propongo una nuova situazione. *Alla lavagna disegno una piramide. Qualcuno dice subito "PIRAMIDE".*
22. Luca: Hai disegnato una piramide.
23. *Disegno una piramide incompleta con tre numeri alla base soltanto.*



24. I: Chi mi sa dire come può continuare? Marco, vuoi continuare tu? *Marco non si esprime anche se ha capito come dovrebbe fare e sarebbe in grado di dirlo. Tutti confusamente dicono ciò che pensano, allora io chiamo uno di loro.*
25. Federico: Basta fare la somma dei due numeri alla base della piramide: 22 più 12 che fa 34, poi 12 più 15 fa 27, poi basta fare un'altra addizione tra 34 e 27 che fa... 61. *Un bambino si accorge che queste sono tre mini piramidi*[5] *e viene alla lavagna ad indicarle.*
26. Vincenzo : Ecco le tre mini piramidi.
27. I: Qual è la prima?
28. *Lui la indica 22+12=34 poi continua…* La seconda è 12+15=27 e la terza è 34+27=61. *Io cerchio le tre mini piramidi.*



29. I: Quindi siamo tutti d'accordo che qui sono presenti tre mini piramidi?
30. Tutti: Sì!!!
31. Vincenzo: La piramide è formata da... alla base ci sono tre mattoni.

---

[4] *Troppe volte si creano cori di sì o no. In effetti, almeno per quello che risulta dal diario, è la prima volta che il coro si verifica. Ritengo che l'insegnante pensi a quante volte i cori si creino durante le sue attività. Ma i cori si manifestano come risposte a domande formulate in un certo modo, quindi è l'insegnante che dovrebbe sforzarsi di evitarle, anche se in certe occasioni sfuggono con molta spontaneità. È già molto importante che l'insegnante se ne sia resa conto. C'è piuttosto un altro aspetto che vorrei rilevare a proposito di un atteggiamento peraltro molto diffuso. Negli interventi 15-19 l'insegnante* riduce al minimo gli interventi degli alunni. *In questo modo la conoscenza viene costruita sì collettivamente, ma senza una reale* condivisione*, perché ogni alunno aggiunge solo minuscole porzioni di sapere* locale *ad un insieme che, di fatto, non controlla nella sua unitarietà, in quanto* questo compito viene assunto dall'insegnante *(e l'alunno lo sa perfettamente). Spesso l'insegnante favorisce* la quantità *degli interventi (prospettiva 'democratica') a scapito della* qualità *del sapere costruito collettivamente (prospettiva 'culturale'). La classe non trae grandi benefici da questo tipo di interventi. Faccio rilevare anche che le affermazioni degli alunni ('formano il risultato' (7), 'formano il numero' (9), (11) e (12), 'addizionando… si ha come risultato' (10)) sono di tipo* procedurale *mentre la frase che imposta l'insegnante ("57 è… la somma di 24 e 33") è di tipo* relazionale*. Penso che nemmeno lei sia consapevole della differenza profonda tra questi due punti di vista. Si consiglia un'organizzazione delle discussioni che limiti la dispersività degli interventi, e* si componga di argomentazioni il più possibile esaurienti. *Rimando ancora una volta alle letture suggerite in precedenza.*

[5] *Bravo. Si è visto in altre classi che rendere visibili le minipiramidi aiuta alunni che non hanno ancora capito come si completa una piramide a più livelli.*

32. I: *Indicando il primo piano chiedo* :Questo come si chiama?[6]
33. *Qualcuno dice* mini piramide.
34. Tutti: No!!!
35. I: Che nome possiamo dare alla parte in cui sono scritti i numeri 34 e 27?
36. Danilo: Piani.
37. I: Quindi questo è il... ? *indicando il primo piano*[7].
38. Danilo e altri: È il primo piano. Questo è il secondo piano. *Indicando la cima della piramide.*
39. Vincenzo: Ho notato una cosa... i due piani... allora... quindi per formare il numero in alto... sommando la base si forma il primo piano, poi sommando il primo piano si forma il secondo piano.
40. I: Bene[8]. Ora vi propongo un'altra... un altro quesito, diciamo. Continuiamo a lavorare con la stessa piramide, però adesso io vorrei che scriveste nei mattoni vuoti,non tanto i risultati ma il procedimento, il processo[9] (6), cioè come siamo arrivati a quel numero... rappresentatemi i prodotti in modo diverso, partendo dal processo.
41. *Dico di copiare sul quaderno la piramide lasciando vuoti gli spazi che devono essere completati da loro. Un alunno molto curioso fa una domanda a cui francamente non so dare risposta, la domanda è comunque un po' confusa:*
42. Vincenzo: Ma la piramide si può fare al contrario, cioè con la punta rivolta in giù? Al posto di fare l'addizione si può fare una sottrazione? *Io rispondo così*[10]:

---

[6] *Voglio portare i bambini ad individuare i piani e indicarli col nome esatto. Inviterei l'insegnante ad una maggiore flessibilità verso i termini. Per esempio gli alunni potrebbero chiamare i primi tre mattoni 'base', 'fila', e non necessariamente 'piano'. In termini generali l'orizzonte dell'insegnante dal punto di vista metodologico potrebbe essere costituito da due fasi, variamente intersecate: nella prima gli alunni sono liberi di esprimersi (nel senso di* argomentare*, non di completare con singole parole, o poco più, frasi impostate dall'insegnante); nella seconda, soprattutto quando i termini emersi sono numerosi o poco significativi o poco appropriati, l'insegnante guida alla* negoziazione *del termine da usare (suggerisco di evitare 'concorsi' o 'sondaggi' ma di puntare sempre sulla riflessione linguistica) sino alla condivisione di quello che diventa il termine 'ufficiale'.*
[7] *Incalzo la risposta, avrei dovuto aspettare. I bambini capiscono cosa vorrei sentir dire.*
[8] *Suggerisco di portare l'attenzione della classe sul fatto che non si sommano* basi o piani, *ma i numeri contenuti nelle caselle (o nei mattoni). Anche per il futuro, è un aspetto molto importante: far sì che gli alunni non confondano, per esempio, 'la cassetta' o 'le arance' con il numero delle arance, il 'gruppo' o 'le persone' con il numero dei suoi componenti, lo 'scaffale' o 'i libri' con il numero dei libri appoggiati e così via.*
[9] *Conoscono i termini* prodotto *e* processo, *anche se è sempre meglio ricordarglielo. Direi che non è tanto importante ricordarglielo, quanto fare in modo che questi termini diventino parti consuete dei loro discorsi, che li usino per esprimere concetti all'interno di un vocabolario condiviso. Una precisazione: più che 'rappresentare in modo diverso il* prodotto*', parlerei di rappresentare il* processo*. Cioè: 3+4 non è una rappresentazione diversa del prodotto, ma la rappresentazione di uno degli infiniti processi che lo esprimono in forma non canonica.*
[10] *La domanda di Vincenzo apre prospettive interessanti, anche se complesse per la scuola primaria perché possono entrare in ballo numeri negativi. L'idea di capovolgere la piramide è suggestiva; si può continuare a lavorare con la piramide classica, comunque seguo l'intuizione di Vincenzo. Alcuni esempi:*

20 3 7
17 -4
13

15 10 3
5 7
-2

17 9 6
8 3
5

Ad alunni più grandi (penso a quelli della secondaria di primo grado), che siano abituati ad un 'clima' early algebra, si può chiedere di trovare una regola generale che permetta di esprimere il numero in basso senza fare calcoli intermedi. Si passa attraverso le rappresentazioni non canoniche delle differenze (nei mattoni più in basso evidenzio alcuni passaggi che permettono di giungere alle rappresentazioni più significative):

20 3 7
20-3 3-7
20-3-(3-7)
20-3-3+7
20-3×2+7

15 10 3
15-10 10-3
15-10-(10-3)
15-10-10+3
15-10×2+3

17 9 6
17-9 9-6
17-9-(9-6)
17-9-9+6
17-9×2+6

La regola generale che permette di definire attraverso il linguaggio naturale il numero in basso in funzione di tre numeri a, b, c è quindi, per esempio: "Il numero nel mattone in basso è la somma dei numeri laterali meno il doppio del numero centrale" che, tradotta in linguaggio algebrico, diventa:

a b c
a-b b-c
a-b×2+c

Se applichiamo la regola a 29, 13, 17, il numero in basso sarà: 29-13×2+17=29-26+17=20.

43. I: Affronteremo questo aspetto più avanti, per ora cerchiamo di seguire i passaggi che vi presento.
44. *Ripeto di copiare la piramide lasciando vuoti gli spazi per inserire ciò che ho chiesto, cioè il processo di come si arriva a quei numeri. Sollecito i bambini a iniziare a parlare.*
45. I: Chi vuol parlare? Cosa scriveremo in questo mattone? *Indicando quello a sinistra nel primo piano dove c'è il 34.*
46. Vincenzo: 22+12.
47. I: Cosa scriveremo in quest'altro mattone a destra (*Indicando il mattone del 27*).
48. *Qualcuno dice 12+15.*
49. I: E qui in cima?
50. *Qualcuno dice : 27.*
51. Eliana: No, 22+12+12+15
52. I: Cosa vediamo? Vediamo se ci ricordiamo, come abbiamo rappresentato i numeri?
53. Eliana: 22+12×2+15[11].
54. I: Sì, ma come li abbiamo rappresentati? Che forma hanno questi numeri?[12]
55. Emanuele: Un'addizione.
56. I: Che numero sto rappresentando con 22+12?
57. Tutti: Il 34.
58. I: Perchè lo rappresento con 22+12?
59. Francesco : Perchè 22 e 12 sono i numeri alla base.
60. I: O:K. Ma come si chiama questo modo di rappresentare i numeri? Vi ricordate che il prof. Navarra ve l'aveva detto il giorno che è stato qui?
61. *Lo sa dire un solo bambino.*
62. Nicolò: Forma non canonica.
63. I: Molto bene. Qual è invece la forma canonica?
64. Tutti: 34. *Si sono immediatamente ricordati dei termini.*
65. I: Bene. Il 34 però è anche una forma... ?[13] Io vedo 34 ma non mi accontento... questa forma non mi dice niente.
66. Emanuele: 3decine e 4 unità.
67. I: Sì, però non mi dice altro.
68. Nicolò: Si indica con n che vuol dire numero.
69. I: No, volevo dirvi un'altra cosa. Il 34 scritto così è opaco, invece scritto 22+12 è trasparente. Cosa significa? *spiego la differenza tra i due termini.*
70. Federico: Nella forma opaca non si possono vedere gli addendi che formano quel numero, mentre se vediamo il modo in cui è formato abbiamo una forma trasparente.
71. *Chiedo alla classe se hanno capito quel che ha detto il bambino e poi faccio un riepilogo.*
72. I: Ora che conosciamo questi termini possiamo usarli e così quando parliamo di forma opaca e trasparente ci capiamo.
73. Vincenzo: La forma trasparente è come un vetro, in un vetro vedi quello che c'è dietro, ad esempio 22+12, ma anche dietro 22 ci sarà un vetro che fa vedere cosa c'è oltre.[14]
74. Federico: Dietro il 34 a vederlo così non so cosa c'è dietro, potrebbe esserci 30+4 o altro; se invece lo rappresento in modo trasparente vedo bene come è stato formato.
75. *Tutti sembrano essere soddisfatti di questa scoperta.*
76. I: Il discorso di Federico mi sembra più che giusto. Lo condividete anche voi?[15]
77. Tutti: Sì!!!
78. Vincenzo: Secondo me tutti i numeri sono trasparenti. Anche un numero molto alto come 1 milione o un miliardo, perché un miliardo è formato anche da un milione.[16]
79. I: Guardate l'ultimo piano, possiamo scriverlo in un altro modo?
80. Emanuele: Potremo scrivere 22+12×2+15. *Io trascrivo alla lavagna ciò che dice.*

---

[11] *Brava Eliana!*
[12] *Vorrei portarli a dire forma canonica e non canonica.*
[13] *Voglio far ricordare loro i termini opaco e trasparente.*
[14] *Vincenzo dice che ogni numero ha dietro di sé una serie di numeri con cui si può formare. Dice che ciascun numero nasconde dietro di sé altri numeri, cioè diversi gradi di trasparenza.*
[15] *Non riesco a trattenere questa soddisfazione ed esprimo un giudizio. Condivido. La seconda parte dell'attività è svolta molto bene. Si vede proprio come gli studenti partecipino in modo consapevole alla costruzione (o al recupero) delle loro conoscenze. Ora sarà difficile che qualcuno porti via agli alunni questi concetti, perché se li sono conquistati attraverso un'argomentazione collettiva ben sostenuta dall'insegnante.*
[16] *Forse confonde un po'. Ha scambiato i numeri per scatole cinesi. Vero, ma anche queste osservazioni così naive possono costituire riflessioni interessanti. Suggerisco la lettura del termine del Glossario generale '[Ebbrezza da simbolo](#)'; parla di vicini di casa di quello che dice Vincenzo.*

Siligo(SS)	I	1	2	**3**	**4**	**5**	1	2	3	Maria Giovanna Murruzzu

22+12×2+15

22+12 | 12+15

22 | 12 | 15

81. I: Cosa notiamo?
82. Emanuele: ... che la soluzione della piramide è sempre la somma della base.
83. I: È la somma di quali numeri? *Nessuno risponde allora continuo incalzando la risposta.* È la somma dei numeri... ?
84. Emanuele: ...alla base della piramide.
85. I: Ma tutti e tre sono alla base. Di quali numeri è la somma il numero che sta in cima?
86. Francesco: Gli addendi del primo piano formano il secondo piano.
87. I: Va bene[17], ma i numeri in alto sono la somma di quali in particolare?
88. Nicolò: Della mini piramide.
89. *Tutti ripetono ciò che ha detto Francesco.*
90. I: Ma il 22 e il 15 dove stanno? Sono la somma dei numeri che stanno... ?
91. Giammario: Sotto.
92. Eliana: Di sotto.
93. Carlo: Ai lati della base.
94. I: Di' bene.
95. Carlo: A destra e a sinistra della base.
96. Marco: Sì, è vero.
97. Emanuele: La somma dei numeri che stanno a destra e a sinistra della base e il 12, che è in mezzo tra il 22 e il 15.
98. I: Ma non c'è il 12, c'è 12 per 2. Quindi?
99. Eliana: 12+12.
100. Marco: 12+12 vuol dire 12 per 2.
101. Teresa: Sarebbe 24.
102. I: Cos'è 24?
103. Eliana: La somma.
104. I: Più che la somma.
105. Emanuele: 12 per 2 è come se fosse 12 più 12. Ah.... sì, il doppio del numero!
106. I: Allora il numero in cima è il risultato... ?[18]
107. Danilo: … dei numeri alla base a destra e a sinistra e il doppio di 12.
108. I: Cioè… ?
109. Vincenzo: … del numero al centro.
110. I: Questa è la regola generale della piramide, no? Vediamo se siete così bravi. Invece dei numeri cosa potremmo usare ?
111. Nicolò: Le lettere[19].

---

[17] *Quando dice* "Va bene" *l'insegnante fa un'affermazione molto ambigua:* cosa *va bene? La frase di Francesco (86) non può andare bene perché* "Gli addendi del primo piano formano il secondo piano" *non significa nulla sul piano matematico. Si potrebbe dire che in Francesco vi sia una frattura tra la sua rappresentazione interna e quella esterna. Francesco possiede una rappresentazione interna di come 'funziona' la piramide, ma la esprime con un linguaggio approssimativo, anche perché non si pone il problema di assumersi la responsabilità della correttezza della sua rappresentazione esterna, in quanto delega implicitamente all'insegnante l'attribuzione di un possibile significato. L'insegnante avalla quindi l'opacità accettando la delega da parte dell'alunno. La conclusione è che non si costruisce alcuna conoscenza e che anche il resto della classe viene penalizzato dal* basso livello di significatività *della situazione.*

[18] *Se si dice che è* il risultato *si assume una prospettiva aritmetica, in quanto si concentra l'attenzione sulle operazioni fra numeri. Il punto di vista è* procedurale, *come abbiamo già visto nel commento al rigo 20. Dire invece: "Il numero in alto è la somma fra… " significa porsi da un punto di vista* relazionale *(metacognitivo) ed esplicitare le relazioni di tipo additivo ("… è la somma fra i numeri laterali… ") e moltiplicativo ("… e il doppio del numero centrale"). In prospettiva si favorisce l'evoluzione del balbettio algebrico.*

[19] *Parlano di lettere perchè abbiamo già affrontato l'argomento e conoscono l'uso della lettera come qualcosa che non si conosce. Molto bene. Naturalmente l'insegnante scrive 'qualcosa che non si conosce' intendendo 'numero'. Anche con gli alunni è sempre meglio precisarlo.*

112. *Invito i bambini a riscrivere la piramide usando le lettere. Eseguono la consegna. Un bambino alza la mano.*
113. Federico: Si possono aggiungere altre piramidi a quella che abbiamo completato?
114. I: Certo.[20]
115. Francesco: Al posto del 22 possiamo mettere una v e una... una v. Poi al posto del 12 una d e una... una d, al posto del 15 una q.
116. I: Siamo d'accordo?
117. Tutti: Sì!!!
118. Eliana: Sì, perché ha sostituito ai numeri le lettere e ha messo le iniziali dei numeri.
119. I: Continuiamo allora…[21]
120. Luca: Il primo piano è v+d e d+q.
121. Vincenzo: Il secondo piano è v+d+d+q

v+d+d+q
v+d | d+q
v | d | q

122. Carlo: Possiamo anche scrivere v+d×2+q.
123. I: Siamo arrivati a una regola generale. Qual è la regola generale allora?
124. Vincenzo: Al posto di scrivere i numeri abbiamo preso solo le iniziali.
125. I: Vi ricordate la regola generale? Generalizziamo.
126. *Lo ripeto perché loro non rispondono.*
127. Federico: Invece di mettere i numeri potevamo mettere n e n (*indica i numeri alla base)* poi di nuovo n e n, poi sopra s come somma nel primo piano.
128. Giammario: Secondo me non va bene.
129. *Anche altri sono perplessi.*
130. Giammario: Se mettiamo le lettere uguali per tutti gli addendi, non sappiamo quale numero è... le lettere devono essere diverse.
131. *Dopo una confusa discussione si arriva a dire che ogni numero deve avere lettere diverse.*
132. I: Prima però vi avevo chiesto di generalizzare e di trovare la regola della piramide. Guardate la cima e provate a dirmi qual è la regola.
133. Vincenzo: Con le lettere si vede la stessa regola di prima.
134. I: Quale? Chi vuol provare a dire la regola generale?
135. Vincenzo: È sempre il doppio.
136. I: Spiega bene. Voi intervenite se non siete d'accordo. Voglio che diciate tutti qualcosa e parlaste tra di voi più che con me.[22]
137. Federico: Anche con le lettere si può fare una piramide, basta che le lettere siano diverse[23].

---

[20] *Spesso i bambini divagano e io rispondo in modo da non allontanarci troppo dalla questione che stiamo affrontando.*

[21] *L'insegnante ha fatto bene a continuare, pur sapendo che la lettera in matematica non è l'iniziale di una parola. Sarà opportuno che riprenda l'argomento, favorendo la riflessione sul fatto che q è anche l'iniziale di 'quattro', di 'quarantadue' e così via, e chiedendo come si rappresenterebbero tre numeri alla base come 6, 61, 73: tutti con 's'?*

[22] *Mi rendo conto che spesso l'attività è una dialettica tra me e tutti loro; la classe non è ancora in grado di confrontare le loro opinioni senza fare riferimento a me.*

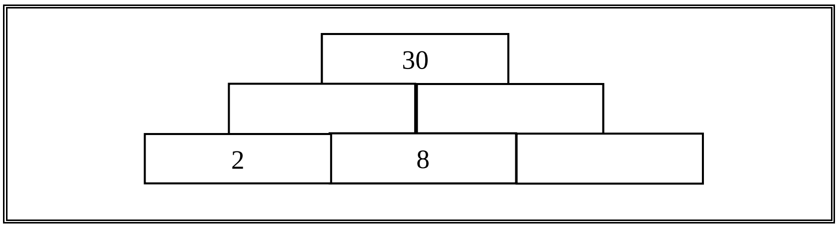
[23] *Approfitto di questa affermazione di Federico per proporre delle riflessioni su una questione di grande importanza nell'insegnamento della matematica sin dalla scuola primaria. Parto dalla frase di Federico. L'insegnante avrebbe potuto chiedergli (la formulazione delle questioni è indicativa): Siamo sicuri che le lettere* debbano *essere diverse, o potrebbero anche non esserlo?". La classe probabilmente non saprebbe cosa rispondere, e l'insegnante potrebbe allora proporre "Se i numeri non fossero tutti diversi, come potrebbero essere disposti nei mattoni?". Immaginando che la classe abbia esperienza nello svolgere delle* ricerche ordinate*, alla lavagna potrebbero comparire le tre situazioni possibili, per esempio:*

8 8 8   11 11 7   13 20 13

gli alunni potrebbero completarle:

8×4	**11×3+7**	**13×2+20×2**
8+8 8+8	11+11 11+7	13+20 20+13
8 8 8	11 11 7	13 20 13

138. *Li invito a guardare la cima.*
139. Vincenzo: v+d+d+q. *Impiegano un po' prima che qualcuno sia in grado di dire qualcosa.*
140. Francesco: I due numeri a destra e a sinistra della base e quello in centro formano i numeri a destra e a sinistra del primo piano.
141. Vincenzo: Allora… quindi i numeri di destra e di sinistra della base vengono sommati più il numero in centro alla base che è sempre moltiplicato per 2.
142. I: È chiaro così?
143. Vincenzo: ... sinistra+quello al centro+quello al centro+destra.
144. *Infine concludo io dicendo la regola: la somma dei numeri alla base più il doppio del numero al centro.*[24]
145. I: Ora vi propongo un ultimo quesito. Delle piramidi che non sono complete, che hanno pochi numeri all'interno.
146. *Scrivo la seguente piramide:*



147. I: Chi vuole completarla?
148. Emanuele: 2 più 8 che fa 10, poi dobbiamo fare 8 più 12 che fa 20; a fianco a 8 dobbiamo mettere 12.
149. Federico: Possiamo fare 30 meno 10 che fa 20.
150. Luca: Fai quello che ha detto Emanuele: 8 più 12 che fa 20. A fianco a 8 ci metti 12.
151. I: Come hai ottenuto 12?
152. Nicolò: 20 meno 8.
153. Luca: Se fai 2 più 8 hai come risultato 10, se il risultato che c'era nella parte superiore della piramide era 30, sapevi che ci volevano altri 20, quindi di là sapevi che c'era 20 e... quando hai 20 con 8... cioè basta fare 8 più 12, basta trovare un numero che con 8 formava 20.
154. Carlo: Questa piramide la puoi anche completare… i numeri alla base rimangono… al posto del 10 scrivi 8 più 2 e al posto del 20 scrivi 8 più 12. In cima scrivi 2più 8per 2 più 12.
155. I: Proviamo ora a scrivere in forma non canonica anche usando la sottrazione. Come la scriviamo?[25]

Le conclusioni verrebbero quindi espresse nel linguaggio naturale:

(1) Se i numeri alla base sono uguali, il numero in alto è il quadruplo del numero ripetuto.

(2) Se i numeri uguali sono quello centrale e uno laterale, il numero in alto è la somma fra il triplo del numero ripetuto e il numero laterale.

(3) Se i numeri uguali sono quelli laterali, il numero in alto è la somma fra i loro doppi.

Si giungerebbe quindi alla traduzione *delle conclusioni in linguaggio algebrico:*

a×4	**a×3+b**	**a×2+b×2**
a+a a+a	a+a a+b	a+b b+a
a a a	a a b	a b a

La situazione che ho descritto appartiene alla famiglia che abbiamo chiamato generale potenziale *(che illustriamo in un articolo che suggeriamo di leggere).*

Precedentemente ho parlato di 'questione di grande importanza' perché questo che ho illustrato è un esempio di uno degli obiettivi principali del progetto ArAl sul piano della formazione: costruire nei docenti – anche della scuola primaria - la sensibilità e le competenze per cogliere nelle loro attività gli spunti che 'aprono' verso la generalizzazione. *Si potrebbe dire: approccio alla generalizzazione come* conquista della leggerezza, *come capacità di* esplorare e rappresentare il mondo *attraverso il linguaggio naturale e i linguaggi dell'aritmetica e dell'algebra e comunicare le scoperte agli altri offrendo loro la possibilità di risolvere problemi analoghi particolarizzando le leggi generali. Tutto questo aiuterebbe l'insegnante a staccarsi, almeno in parte, dalla* pesantezza di operazioni, *algoritmi, calcoli e a guidare gli alunni a sentirsi* produttori di pensiero matematico.

[24] *Attenzione, mancano il soggetto e la copula DONATELLA: VANNO BENE QUESTI TERMINI? SE NO CAMBIALI TU (è importantissimo che la frase sia 'completa'):* Il numero in alto è *la somma dei numeri alla base più il doppio del numero al centro.*

[25] *Carlo ha applicato la strategia vista prima per completarla. Voglio sottolineare la strategia della sottrazione alla quale qualcuno prima ha accennato.*

30
2+8 | 30-2+8
2 | 8 | 30-2+8-8

156. Luca: 30 meno10 che farebbe 20.
157. Federico: 30 meno 2 più 8.
158. I: E questo mattone come l'abbiamo ottenuto? (*indicando quello in basso a destra).*
159. Emanuele: Facendo 30 meno 2 più 8 meno 8.
160. I: Vanno bene questi numeri scritti così? Cosa possiamo mettere?
161. Federico: Dobbiamo vedere se calcolando otteniamo i numeri già ottenuti. *Calcola.* 30-2+8-8=28
162. I: Invece che numero doveva esserci?
163. Tutti: 12. *La classe è perplessa e cercano di capire cosa non funziona*
164. Vincenzo: Ha sbagliato, deve fare... si fa... al 2 più 8 si fa un insieme. Tra parentesi. Che significa 10 così fa 30-(2+8). In questo modo si arriva a 20 non come prima che dava 36. *Allo stesso modo risolve anche l'altro mattone: 30-(2+8)-8.*
165. I: È sufficiente questo?
166. Vincenzo: No. 30-10 e 20-8 fa 12.
167. Carlo: Quindi è giusto.
168. Luca: Se tu non lo mettevi tra parentesi cambiava il senso. Per esempio prima 30 meno 2 che faceva 28, poi 28 più 8 che faceva 36... e non aveva significato. Ha messo tra parentesi... che quindi fa 10. 30 meno10 fa 20 Invece di là *(indica il mattone a destra del primo piano)* ha fatto 30 meno 8 che fa 22. 22 meno 10 fa 12. Senza le parentesi aveva tutto un altro significato.

30
2+8 | 30-(2+8)
2 | 8 | 30-(2+8)-8

169. I: Luca ha detto una cosa molto giusta, non trovate? La parentesi fa cambiare significato. I numeri hanno significato? Le operazioni hanno significato?
170. Eliana: Un conto è dire 30-2+8, un altro è dire 30-(2+8).
171. I: La possiamo scrivere ancora meglio?
172. Vincenzo: 30-(2+8)-8... 30-2. in pratica togliamo 2[26].
173. I: La regola è che devo sottrarre dal mattone del primo piano a destra il mattone in basso al centro[27]. *Cerco di far vedere ai bambini la scrittura per farli arrivare alla parentesi quadra. Ne segue una spiegazione da parte mia sui due termini della sottrazione che potrebbero essere separati dalla parentesi quadra, ma i bambini non riescono a dirlo e quindi l'attività finisce così.*

.[28]

---

[26] *Vincenzo intuisce la presenza di +8 e -8 che si annullano, ma non considera la parentesi.*

[27] *Attenzione a sottrarre o aggiungere* mattoni *invece di* numeri*… (v. mio commento al rigo 40).*

[28] *Sapendo quanto sia complesso il lavoro in una pluriclasse, mi compiaccio con l'insegnante per la conduzione dell'attività. A parte le questioni sulle quali sono intervenuto con dei commenti, lo sguardo d'insieme è positivo; partecipano praticamente tutti gli alunni (sarebbe interessante sapere a quali livelli appartengono quelli che sono intervenuti di più – Vincenzo, Federico, Emanuele, Eliana, Francesco), sono sviluppati molti punti interessanti, emerge un'evidente competenza matematica diffusa, la classe nel suo insieme esprime una buna intelligenza sociale, frutto anche, ritengo, di interventi efficaci in questo senso da parte degli insegnanti.*