

*Commenti dell'insegnante di classe*

*Commenti degli insegnanti del gruppo Donaggio, Picasso*

*Commenti dell'IR Giancarlo Navarra*

*Commenti di Nicolina Malara*

Marzo 2016

1 (Uso del registratore)

Parole Chiave

SUCCESSIONI, MODULI, POSTO

### Presentazione dell'attività

La classe è composta da 23 alunni che in prima hanno già lavorato con le successioni.

Negli anni seguenti abbiamo lavorato con la Matematica, le piramidi di numeri, rappresentazioni di situazioni problematiche per Brioshi. Attualmente abbiamo ripreso le successioni.

### Descrizione della situazione proposta

Si richiede agli alunni, data la successione cuore stella stella nuvola, di trovare l'elemento che occupa il 34° posto.

È la prima volta che gli alunni si trovano di fronte a questa richiesta.

♥☆☆☆☆♥☆☆☆☆♥☆☆☆☆♥☆☆☆☆♥☆☆☆☆ →

Nella registrazione è stata omessa la parte relativa alla discussione sugli enti in gioco, e all'analisi della successione.

1. I: Data la successione: cuore-stella-stella-nuvola, cuore-stella-stella-nuvola io vi chiedo: che elemento c'è al 34° posto? Vorrei anche che mi spiegaste come riuscite a trovare l'elemento che occupa il 34° posto<sup>1</sup>.
2. R. (alzava la mano) Nel 34° posto c'è la nuvola.
3. I: Perché?
4. R: Perché ....
5. I: Prova a spiegarmi perché, come hai fatto? <sup>2</sup>
6. R: Moltiplicando 4. <sup>3</sup>
7. I: Perché moltiplichi 4? Spiegami meglio perché non capisco <sup>4</sup>.
8. R: Gli elementi. In verità gli elementi sono infiniti però...
9. I: Però? <sup>5</sup>
10. R: Quattro... sono gli elementi di un modulo.

<sup>1</sup> La domanda è troppo articolata. Avrei dovuto chiedere semplicemente cosa c'è al 34° posto. Dovrebbero essere in grado di spiegarmi il perché senza che io lo richieda subito. In caso contrario posso sempre chiedere spiegazioni in un secondo momento senza sovraccaricarli di richieste. A nostro avviso non vi è un sovraccarico di richieste: i bambini devono essere abituati ad argomentare sempre le loro risposte. Buona domanda.

<sup>2</sup> Sarebbe stato meglio che I dicesse 'prova a spiegarci' perché... . L'insegnante dovrebbe cercare di evitare i dialoghi a due ed invece far passare il messaggio che il bambino sta parlando a tutta la classe.

<sup>3</sup> Sta iniziando una conversazione botta-risposta, d'altro canto quando i bambini hanno difficoltà a rispondere è difficile farli argomentare usando un linguaggio più ricco. Mi sono resa conto che questo è uno sbaglio che faccio spesso: tendo ad affrontare un argomento prima che i bambini abbiano imparato a padroneggiare il linguaggio, è chiaro che quando chiedo spiegazioni non sono in grado di darne!

Quali sono secondo l'insegnante i prerequisiti che mancano in questo caso?

Non avendo mai fatto questo tipo di lavoro i bambini non sono abituati a tradurre i numeri utilizzando il linguaggio naturale, in questo contesto. Questo diario è stato redatto forse troppo presto (prima attività di questo tipo).

Qual è il momento più opportuno per fare il diario? Dopo un paio di lezioni o di più? Forse è utile audioregistrare le prime lezioni ed ascoltarle, e aspettare per fare il diario che i bambini padroneggino di più l'argomento? Oppure potrebbe essere interessante confrontare due diari, uno della prima lezione e uno di una lezione di un periodo successivo. Credo che queste possibilità vadano esplorate dal gruppo. Per quel che mi riguarda, soprattutto se gli insegnanti sono alle loro prime esperienze con il progetto ArAl e la Metodologia delle Trascrizioni Pluricommentate, direi che qualsiasi momento va bene. Anche un diario 'crudo' offre ampi spazi per intervenire con commenti e riflessioni. Sarebbe molto produttivo se l'insegnante, in ogni caso, si cimentasse con almeno due micro diari, in modo da effettuare dei confronti come suggeriscono Donaggio e Picasso.

<sup>4</sup> Usare la I persona plurale. Concordo. Viene spontaneo chiedere 'Spiegami', ma è didatticamente molto importante coinvolgere anche in compagni con un 'Spiegaci'.

<sup>5</sup> Incalzo perché i silenzi di Riccardo sono lunghi e perdo l'attenzione degli altri bambini. Qui credo che conti molto l'esperienza delle insegnante e della classe. Il contratto didattico va costruito in modo che gli alunni capiscano che il dialogo non avviene fra l'insegnante e un solo alunno alla volta, ma che la costruzione sociale della conoscenza prevede il coinvolgimento attivo di tutti.

11. I: Allora prova a ripetere meglio.
12. R: Moltiplicando 4, che sarebbero gli elementi di un modulo, ho trovato che al numero 34 c'è la nuvoletta<sup>6</sup>.
13. I: Non capisco bene. Hai moltiplicato 4... Prova a spiegarmi meglio perché non ho ben capito<sup>7</sup>... (R. non riesce a proseguire) ti aiuta A. O. che ha la mano alzata.
14. A.O.: 34 ... è che ... guardo solo le unità, le decine non ci sono, allora guardo solo il 4, conto 1, 2, 3, 4 e viene la nuvola...<sup>8</sup>
15. I: Avete sentito come ha fatto A. O.? Siete d'accordo? Sentiamo cosa pensa P.
16. P: Volevo dire che non può essere la nuvola... perché un insieme è formato da...
17. I: Si chiama insieme quello?<sup>9</sup>
18. P: No... un modulo è formato da quattro elementi... ho calcolato 4+4+4+4 finché non sono arrivato più vicino al 34, solo che 0 è maggiore ed è 36 o è minore ed è 32, quindi non può essere la nuvola che è il 4° elemento.
19. D: Io ho moltiplicato il 4 fino ad arrivare a 32, poi ho aggiunto il 2. Perciò se al 32° posto c'era la nuvola più 2 sarà la prima stella<sup>10</sup>.
20. I: E come lo scriveresti in linguaggio matematico?
21. D:  $4 \times 8 = 32$  e  $32 + 2 = 34$ .<sup>11</sup>
22. I: E cosa c'è al 34° posto?
23. D: La prima stella<sup>12</sup>.
24. I: A., cosa volevi dire?
25. A: Io ho fatto così come loro, solo che ho fatto una specie di schema. All'inizio ho diviso<sup>13</sup> il 34 in 32 e 2. Ho scritto la tabellina del 4 e ho evidenziato qua in rosso il 32. Dopo il 2 ho fatto un modulo della sequenza e ho visto che il secondo elemento era la stella verde, la prima stella verde. Allora poi ho fatto  $32 + 2 = 34$ .
26. I: Qualcuno ha fatto in un modo diverso? Avete sfruttato per lo più la moltiplicazione. Avremmo potuto usare anche un'altra operazione?<sup>14</sup>

$34:4=32 \quad 32+2=34$
-------------------------

<sup>6</sup> Errore a parte (al 34° posto non c'è la nuvoletta), qui avrei dovuto far puntualizzare: "al 34° posto". L'insegnante avrebbe dovuto chiedere all'alunno di specificare anche per quale numero viene moltiplicato il quattro, facendolo arrivare a dire che si deve moltiplicare il numero degli elementi di ogni modulo per il numero dei moduli completi. Il bambino ha una visione procedurale della situazione e non riesce ad esprimersi. Ma sbaglia anche il conteggio.

<sup>7</sup> Ancora la prima persona, non va bene. Un 'Non capiamo, spiegati meglio' coinvolgerebbe maggiormente la classe.

<sup>8</sup> Proporre come risposta l'oggetto che si riferisce alla posizione della cifra delle unità è uno degli errori tipici dei bambini e denota un tipo di strategia ingenua ma più evoluta di quella basata sul conteggio. Non sono sicuro che, anche dopo gli interventi successivi (dal 15 in poi), A.O. abbia capito il suo errore: se non sbaglio di interpretare l'intervento, l'alunno avrebbe dato la stessa risposta per qualunque numero di posto che terminasse con 4 (lo spiega chiaramente: "... le decine non ci sono..."). È un errore concettuale tipico all'inizio dell'attività.

<sup>9</sup> Forse devo aspettare che finisse il ragionamento, ma mi sembra impossibile che dopo tanto tempo che parliamo di successioni P., che è uno bravo, non usi ancora la parola "modulo". Ci troviamo d'accordo.

<sup>10</sup> Vedi Commento al rigo 6.

<sup>11</sup> L'insegnante avrebbe potuto chiedere di tradurre in linguaggio matematico utilizzando una sola operazione. Ho pensato di rimandare la domanda ad un secondo tempo in modo che l'alunno non perdesse il filo del discorso. È evidente che il ragazzo non ha incorporato il significato dell'operazione di divisione e non conosce la sua rappresentazione euclidea, ossia l'espressione del dividendo mediante divisore quoziente e resto. Il suo ragionamento è però perfetto.

<sup>12</sup> I avrebbe potuto chiedere di argomentare la propria risposta ad esempio ponendo la domanda: perché? O come hai fatto a capirlo? **Concordo.**

<sup>13</sup> "Diviso" non è il termine corretto, però se lo fermo puntualizzando la parola rischio di bloccarlo. Avrei potuto farlo riflettere su quanto ha detto ma mi sono persa cercando di seguire il ragionamento. Poi ho deciso di glissare temendo che si aprisse un dibattito fuorviante. Invece forse avrei dovuto soffermarmi e chiedere una maggior condivisione da parte di tutti gli alunni alle risposte date da alcuni compagni. In fin dei conti non sono sicura che tutti ci siano arrivati! Sembra un'idea interessante; si suggerisce all'insegnante, di riprendere, in una lezione successiva, il commento di a. facendolo discutere dai compagni.

<sup>14</sup> E come al solito, per la mia impazienza, sbaglio e finisco per fare una domanda troppo esplicita accennando pure a delle "operazioni"!!! Avrei potuto chiedere "Come avremmo potuto scrivere una frase alternativa a quella trovata in linguaggio matematico" o qualcosa di simile. E comunque avrei dovuto aspettare che l'alternativa nascesse spontaneamente da loro; magari era il caso di chiudere l'intervento oppure proporre una nuova successione e consolidare quanto raggiunto fino a questo punto. Va bene, non esageriamo. I poteva dire "un'altra strategia".

27. G: La divisione  $34:4$  fa  $32+2$  fa 34.<sup>15</sup>
28. I: Come lo scrivo in linguaggio matematico?
29. P: L'operazione di G. è sbagliata perché  $34:4$  non fa 32.<sup>16</sup>
30. L: Il 4 sta nel 34 8 volte col resto di 2.
31. I: Questo come mi aiuta a capire cosa c'è al 34° posto?
32. G: Io ho fatto la divisione e facendo ho un po' deciso se arrivare al 34 o al 36, e ho deciso di arrivare al 36... perché se faccio  $36-2$  arrivo al 34.<sup>17</sup>
33. I: prova a spiegare meglio quello che hai fatto.
34. G non sa spiegare.<sup>18</sup>
35. P:  $34:4$  fa 8 con resto di 2, solo che... quel 2 cosa c'entra?<sup>19</sup>
36. I: Cosa c'entra quel 2?
37. S.: Forse la divisione di G. ci serve che... l'8... conti 8 sulla successione più 2 che fa la prima stellina verde.<sup>20</sup>
38. A.: Il ragionamento di A. S. ... non saprei...
39. I: Vorrei approfondire quello che ha detto A.S.. Puoi ripetere quello che hai detto magari spiegando un po' meglio ai tuoi compagni cosa intendi?<sup>21</sup>
40. S.: Conti 8 elementi sulla successione e dopo aggiungi 2 e arrivi alla prima stellina verde.<sup>22</sup>
41. I: Che dite?<sup>23</sup>
42. L: Forse questo è il modo per trovare il 34° elemento. (Poi si blocca e pensa) il 34 dovrebbe essere il... noi dobbiamo trovare il 34° elemento. 4 sono gli elementi dentro al modulo e 8 sono i moduli da contare per arrivare

<sup>15</sup> La scrivo alla lavagna anche se è errata. Dall'intervento di G. si vede che la mia domanda era prematura! Lei infatti ha intuito l'alternativa ma sta ancora ragionando in direzione della addizione ripetuta/moltiplicazione. Al di là di come si esprime il ragazzo egli va al di là dell'operatività cogliendo la relazione tra 34 e il maggior multiplo di 4 che lo precede. Intuisce chiaramente il ruolo della divisione nella soluzione del problema. Forse I poteva intervenire chiedendo aggiustamenti sulla rappresentazione.

<sup>16</sup> P. è un alunno che continua ad essere sempre troppo attento al risultato.

<sup>17</sup> Probabilmente l'alunno ha valutato se arrivare al 32 (8 moduli completi) o al 36 (9 moduli completi); comunque la sua è un'ottima intuizione. Concordo. G. ha immaginato la situazione secondo quella che abbiamo chiamato nella Nota 9 dell'Unità 12 'Metafora dell'autobus':

Un disegno alla lavagna rappresenta il percorso dell'autobus. Lo '0' rappresenta il capolinea e si numerano le fermate successive man mano che si 'racconta' il disegno:



Si propone alla classe di immaginare che le fermate siano, per esempio, in corrispondenza dei numeri civici multipli di 5. Un passeggero, per raggiungere il numero civico 22, compreso tra le fermate 4 e 5, può scegliere se scendere a quella prima (la 4, in corrispondenza del civico 20) o a quella dopo (la 5, in corrispondenza del civico 25). Nel primo caso dovrà andare avanti di 2 numeri civici, nel secondo tornare indietro di 3.

<sup>18</sup> E ci credo! È prematuro! Vedi Commento al rigo 6.

<sup>19</sup> P. pone la domanda giusta, ha intuito che quel 2 deve avere un significato ma non riesce ancora a motivare. P non riesce ad interpretare nei termini del problema il significato della divisione ed in particolare del resto.

<sup>20</sup> Però qualcuno ci arriva! Solo che avrei dovuto lavorare anche sul linguaggio: "Ci serve che", "fa la prima stellina verde". Concordiamo che va affinato il linguaggio; si potrebbe proporre la stesura di una tabella con numero del posto, numero degli elementi in ogni modulo, numero di moduli completi, numero di elementi rimasti fuori, e rappresentazione completa in linguaggio matematico, per poi passare alla traduzione in linguaggio naturale. L'insegnante avrebbe potuto chiedere anche che cosa rappresenta il numero 8, trovato come quoziente della divisione, anche per favorire la costruzione condivisa delle conoscenze. Condivido l'idea di una tabella costruita assieme agli alunni che metta a confronto in modo chiaro concetti, termini, significati, traduzioni.

<sup>21</sup> Ora tento di rimediare chiedendo ad A.S. di spiegare meglio. Forse dovevo fermarmi? No. Una richiesta di argomentare meglio è quasi sempre una strada importante da praticare.

<sup>22</sup> Andrebbe chiarito se il bambino si sta confondendo nel linguaggio tra il termine modulo e il termine elemento o se è convinto che il quoziente della divisione rappresenta il numero degli elementi. Per verificare si potrebbe proporre agli alunni la ricerca di un diverso numero di posto, in modo che non coincidano (o non siano multipli) il numero del modulo e il numero degli elementi in ogni modulo.

<sup>23</sup> Domanda che stimola il caos di mille risposte sovrapposte, me la sono cercata! Ritengo utile riportare un Commento che l'esperta linguista GISCEL Donatella Lovison, durante gli anni della collaborazione con il progetto ArAl, aveva inserito in un diario a proposito di domande di questo tipo, peraltro molto frequenti: "È vero che il contratto con gli alunni prevede il decentramento nella costruzione delle conoscenze, ma questo genere di domande mi lascia sempre dubbiosa: hanno un carattere troppo generale e c'è il rischio concreto che i bambini osservino di tutto e di più, disperdendo le conquiste fatte nelle fasi precedenti e disorientando l'insegnante che può incontrare difficoltà a ricondurre la lezione nel giusto binario. Propendo per domande più 'orientanti', cioè che contengano nella loro formulazione delle 'parole indirizzo' che orientino verso l'obiettivo che l'insegnante si pone."

all'elemento 34°. Solo che non si arriva al 34° elemento... ci vogliono ancora 2 elementi in più e troviamo l'elemento 34°<sup>24</sup>.

43. I: Vorrei sapere cosa pensa P. di quello che ha detto L.<sup>25</sup>
44. P: Io sono d'accordo con quello che ha detto L. perché, come ha detto, visto che noi non riusciamo ad arrivare al 34... possiamo fare o due in meno o due in più<sup>26</sup>.
45. I: Cosa vuoi dire con due in meno o due in più? Spiegati meglio.
46. P: Cioè che... volevo dire che devi fare una moltiplicazione e devi fare 9 per 4 che fa 36 e 36-2 che fa 34.<sup>27</sup>
47. I: Scriviamolo alla lavagna:  $9 \times 4 = 36$   $36 - 2 = 34$ .
48. Ma per scriverlo meglio in linguaggio matematico come posso rappresentare quello che hai detto? Posso scriverlo con una sola frase matematica? (P. non risponde, faccio intervenire D. che ha la mano alzata).
49. D:  $(9 \times 4) - 2 = 34$ .
50. I: Ok. Allora modifichiamo anche la prima per favore (quelle dette precedentemente dai compagni).
51. D:  $(4 \times 8) + 2 = 34$ .
52. I: Poi passiamo alla seconda.<sup>28</sup>
53. G:  $(34 : 4) + 2 = 10$ .<sup>29</sup>
54. L: ... ma il 10 non è che c'entri tanto...
55. I: Perché?<sup>30</sup>
56. L non sa rispondere.
57. A: Anche 10 andrebbe bene. Se io ho scomposto qua il 34 in 32 e 2 posso scomporre... 32, sì... fa parte della tabellina del 4 ma anche di 8, posso scomporre il 10 in 8 e 2. Troverei al secondo posto della successione sempre lo stesso simbolo, la stella verde<sup>31</sup>.
58. G: L. ha dato una informazione perché ha detto che per arrivare al numero... al 34° posto ci sono due elementi che mancano quindi è la prima stella perché è il secondo elemento della successione<sup>32</sup>. Quindi la stella è il secondo elemento<sup>33</sup>. Il secondo elemento della successione è la prima stella.<sup>34</sup>

Alla pagina successiva: Nota 17 dell'Unità 12: Classi di resto

<sup>24</sup> Il linguaggio è da perfezionare. Ma essendo l'attività nuova non insisto vista la notevole difficoltà espressiva. Noto inoltre che ci sono alcune lacune, nessuno mi parla dei "posti" degli elementi. Evidentemente questo lavoro va programmato con una certa regolarità.

<sup>25</sup> Ottima domanda. Nelle FAQ del sito analizziamo domande di questo tipo alla voce ['Invito a riformulare l'argomentazione di un compagno'](#).

<sup>26</sup> Chiedere anche esempi in cui i numeri da togliere o da aggiungere siano differenti, in modo da non fissare nei bambini l'idea che la quantità da togliere o aggiungere sia sempre la stessa. Concordo. V. mio Commento al rigo 32 in merito alla metafora dell'autobus (va avanti di 3, torna indietro di 2).

<sup>27</sup> Pietro è sempre ancorato al risultato, la sua parola d'ordine è: "che fa". Dovevo chiederti di ripetere meglio.

<sup>28</sup> Non è chiaro cosa I volesse dire. Voleva che i ragazzi focalizzassero la loro attenzione sulla seconda rappresentazione e la interpretassero in relazione al problema?

<sup>29</sup> Non ha capito.

<sup>30</sup> Sono d'accordo con il ragazzo. La scrittura  $10 = 34 : 4 + 2$ , a parte che non è corretta non essendo 34 multiplo di 4, non si presta ad alcuna interpretazione immediata in riferimento al problema.

<sup>31</sup> Dovevo approfondire la sua teoria prima. Infatti rieccola qua! Finché non la affronterò tornerà per perseguitarmi. Molto, molto interessante quello che dice A. Egli individua una analogia tra 34 e 10, precisamente il fatto che divisi per 4 hanno entrambi resto 2, pertanto egli sottolinea che nel posto 10 così come nel posto 34 ci sarà sempre lo stesso elemento del modulo. Il ragazzo A. ha fatto una interessante scoperta matematica (riguardante le classi di resto modulo 4) ed effettuato un piccolo ragionamento che poteva diventare oggetto di una interessante attività di generalizzazione Peccato che questa apertura sulle classi di resto sia andata perduta. Ma l'insegnante se ne è accorta? Se non sa nulla / non sapete nulla sulle classi di resto possiamo rimediare. In attesa di un possibile intervento di Malara sulle classi di resto, inserisco nell'ultima pagina di questa trascrizione il contenuto della Nota 17 dell'Unità 12 che introduce in modo essenziale questo tema.

<sup>32</sup> Forse sarebbe meglio dire che è il secondo elemento del modulo.

<sup>33</sup> Espressioni linguistiche sporche, confusione tra modulo e successione, uso improprio del quindi.

<sup>34</sup> Discussione interessante da diversi punti di vista. Abbastanza buono il ruolo svolto dall'insegnante, raccomando di evitare il più possibile i dialoghi e le personalizzazioni, la invito a limitare il singolare e di usare il plurale nella discussione di classe.

*Nota 17: Classi di resto (v. pag. 96 dell'Unità 12; gli esempi citati fanno riferimento al Diario 23)*

Consideriamo tre successioni di modulo 3:

- 1) 2, 5, 8, 11, 14, ...
- 2) 1, 4, 7, 10, 13, ...
- 3) 0, 3, 6, 9, 12, ...

Nelle prime due il primo termine (rispettivamente 2 e 1) non è un multiplo del modulo; solo la terza, quella che inizia con 0, è riconoscibile come 'tabellina del 3'.

Per comprendere cosa unisca queste tre, e le infinite successioni aventi modulo 3, ricorriamo ad una rappresentazione tabulare in cui distribuiamo la serie dei numeri naturali, a partire da 0, in tre classi:

0	1	2
3	4	5
6	7	8
9	10	11
12	13	14
...	...	...

Poiché nella divisione euclidea per 3 di un qualsiasi numero naturale i possibili resti sono 0, 1 o 2, si può osservare che tutti i numeri che appartengono alla prima colonna, hanno come resto 0 e rappresentano i multipli di 3 (appartengono alla 'classe di resto 0'); quelli della seconda hanno come resto 1 (appartengono alla 'classe di resto 1'), e infine i numeri della terza colonna hanno come resto 2 (appartengono alla 'classe di resto 2').

Assumendo quest'ultima colonna (2, 5, 8, 11, 14, ...) come riferimento, si può esprimere questo principio: *il prodotto di un qualsiasi numero per 3 sommato a 2 è uguale ad un numero appartenente alla successione data.*

E quindi:

$$\begin{aligned}
 2 &= 3 \times 0 + 2 \\
 5 &= 3 \times 1 + 2 \\
 8 &= 3 \times 2 + 2 \\
 11 &= 3 \times 3 + 2 \\
 14 &= 3 \times 4 + 2 \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

Tali rappresentazioni possono emergere spontaneamente, nella azioni d'aula. È importante saperle riconoscere e organizzarle con gli alunni. Per esempio successioni come:

- 2, 5, 8, 11, 14, 17, ...
- 5, 8, 11, 14, 17, 20, ...
- 14, 17, 20, 23, 26, 29, ...

sono riconoscibili in quanto sono generate dall'operatore +3 ed i loro elementi appartengono alla classe di resto 2.

La stessa rappresentazione, in parte numerica e in parte figurale, si può anche ottenere disponendo i numeri naturali su una linea che si sviluppa a formare una spirale.

Se la ragione della progressione è 3, man mano che ci si muove lungo la spirale, si osserva che i naturali, a partire per esempio da 5, si dispongono a formare tre classi. Valgono pertanto le considerazioni fatte in precedenza.

