

■ De los frisos gráficos a los frisos musicales

Un análisis geométrico de dos modelos: una actividad interdisciplinaria entre matemáticas, artes figurativas y música¹

Giancarlo Navarra

Profesor de Ciencias CFN en la Escuela Media de S. Giustina. Bélgica

Saverio de Cian

Profesor de Educación musical en la Escuela Media de S. Giustina. Bélgica

• • •

El artículo contiene elementos de reflexión sobre algunos itinerarios desarrollados y está estructurado en forma de diario razonado de la actividad desarrollada en clase. En la primera parte, después de algunos ejemplos relativos a la historia de la expresión pictórica, comentados en clase por el profesor de matemáticas junto con el profesor de educación artística, se ilustra el recorrido matemático relativo al estudio de los frisos (con una duración aproximada de unas quince horas) con comentarios y reflexiones sobre las aptitudes de los alumnos y alumnas. En la segunda parte, se presenta la actividad, desarrollada en un tercer curso (13-14 años) durante una hora por semana, desde noviembre a mayo.

From graphic to musical friezes

This article sets out an interdisciplinary approach to the teaching of plane isometry in the class. This experiment was conducted in Italy with students aged 12 to 14, who were asked to relate seven different types of monodirectional pictorial friezes to various possible musical examples. With this activity, students learn to distinguish the various types of models and they are introduced to the construction of dodecaphonic music.

• • •

■ INTRODUCCIÓN

Las simetrías (empezando por las más elementales: las de nuestro cuerpo o de su imagen ante el espejo); las oposiciones conceptuales (las *dualidades* caos/orden, masculino/femenino, cielo/tierra); las regularidades (los latidos del corazón, ritmos y cadencias poéticas o musicales, la alteración del día y de la noche o la alternativa de las estaciones) están presentes desde tiempos remotos en la experiencia natural de la especie humana e influyen sobre sus fundamentales necesidades espirituales tales como el *conocer* y el *expresarse creativamente*.

Muestras regulares talladas una junto a la otra en huesos de lobo o en trozos de madera representaron, hace 30.000 años, una primitiva manera de fijar permanentemente informaciones

referidas de algún modo a las regularidades, el transcurrir de los días desde el comienzo de la caza o el control cotidiano del número de ovejas en el rebaño de un pastor. Las decoraciones geométricas que contenían la idea de la repetición (retículas en hilera de círculos, motivos en zig-zag, triángulos, pequeñas líneas paralelas, espirales) ornaban cavernas, refugios rocosos y objetos de hace 10.000 años. Incisiones análogas sobre enormes piedras, los *relojes solares* del 3.500 antes de Cristo -presentes en culturas distintas y muy lejanas entre ellas, como los indios Ansazi del sudoeste de los Estados Unidos y los celtas en Irlanda o en Bretaña-, señalaban el paso de las fases lunares, los plazos de los solsticios y de los equinoccios y las posiciones de las constelaciones. El mito de Teseo y del Minotauro (oposición *conocimiento / ignorancia*) lo hallamos en platos y copas griegas; se trata de dibujos en forma de laberinto que se repiten uno tras otro y siguen repitiéndose con infinitas variaciones incluso hasta cuando el recuerdo del mito -y, por consiguiente, de sus significados originales- se iba perdiendo en el tiempo.

I ESTRUCTURA DEL ITINERARIO DIDÁCTICO

Los frisos ornamentales obtenidos por la repetición indefinida de un motivo gráfico en una sola dirección se hallan en el arte de todas las épocas y en todos los pueblos, y llevan en su seno la tentativa originaria del hombre de *fijar* sobre un soporte concreto, gracias al artificio de la *iteración*, la dimensión física del *discurrir del tiempo* y sus *ritmos*. Todos los frisos están mancomunados por una especie de vínculo profundo que, una vez captado, permite interpretar de una manera nueva su fascinación: el ser *geometría dinámica*. Y así se descubre -precisamente a través de la geometría (y particularmente las isometrías)- que todos los infinitos posibles frisos son referibles únicamente a *siete tipos*.

La actividad que presentamos constituye el momento de encuentro entre disciplinas distintas (matemáticas, música, arte, informática) con el fin de proponer a los alumnos y alumnas, en el arco del trienio (11-14 años), una especie de itinerario transversal que tiene como hilo conductor la matemática; exactamente las isometrías planas. El objetivo fundamental es el de hacer entender al alumnado de qué modo unos conceptos matemáticos (para muchas personas fruto de pura e inconstante racionalidad) puedan subtender actividades aparentemente tan alejadas de ellos como las producciones pictóricas y musicales. En efecto, la regularidad y las simetrías han pertenecido desde siempre a la música. En la música dodecafónica, especialmente, unas profundas analogías con la geometría inducen a acercamientos sugestivos que, tal vez, permiten comprender tanto una cosa como la otra, incluso a muchachos de catorce años de edad. De ahí la idea de los *frisos musicales*.

La actividad *matemática-música* está constituida por momentos *comunes* con las distintas disciplinas y por otros no comunes, sobre todo en las fases iniciales en las cuales el profesorado ha construido y profundizado, autónomamente, otros aspectos conceptuales y operativos propios de sus respectivas disciplinas.

Por lo que respecta a la *matemática*, los conceptos implicados son:

- simetrías axiales, rotaciones, traslaciones y sus composiciones
- simetrías en los polígonos regulares
- composiciones y descomposiciones de figuras planas.

Un objetivo importante es el de hacer más estimulante el estudio de la matemática,

favoreciendo un acercamiento a la geometría *dinámico* y fuertemente *manipulativo* y una actitud *indagadora* que, llevando de manera natural a la utilización de los citados contenidos matemáticos, permita efectuar análisis -o presentación de proyectos- de frisos.

Desde el punto de vista de la *educación musical*, la actividad está considerada como epílogo de experiencias maduradas en la primera y en la segunda clase (11-13 años), y sus objetivos principales son los siguientes:

- el conocimiento del lenguaje y el uso sabedor de la notación
- el reconocimiento y la utilización, en sus características esenciales, de los aspectos fundamentales de la variación (ritmo, dinámica, timbre)
- la comprensión de los fenómenos musicales del 900 en sus componentes estructurales externos (género, forma, orgánico instrumental, colocación histórica).

Esta parte de las actividades está concebida de dos formas:

- como juego de investigación en el cual el alumno (o el grupo de alumnos y alumnas), a través de cuidadosos análisis, debe *reconstruir el identikit* de los fragmentos poniendo en evidencia los elementos que lo caracterizan (que examinaremos detalladamente más adelante) e individualizando luego el tipo de «friso musical» al que pertenecen
- como momento de *producción musical* en el cual los estudiantes (apoyándose en las experiencias anteriormente maduradas y con la complicidad de siete ordenadores), *proyectarán* el «friso musical» que, posteriormente, será interpretado musicalmente con un diálogo melódico o bien con un simple contrapunto dodecafónico. La composición realizada se registra después en un programa de ordenador, para permitir oír la y para las eventuales modificaciones: la selección, el acercamiento, los timbres, y por fin la correspondiente impresión de la partitura.

De estos trabajos, algunos, obviamente en un estilo «aforístico», se han presentado en la muestra didáctica de fin del año escolar con «carteles sonoros»; y otros, en cambio, han sido utilizados en el concierto de fin de año.

I RECORRIDO MATEMÁTICO

I INTRODUCIENDO TESELACIONES Y FRISOS (ADAGIO CON BRÍO)

Para encuadrar desde un punto de vista artístico el argumento, presentamos y comentamos en clase unas imágenes relativas a la expresión pictórica sobre el tema de los frisos y de las teselaciones, empezando por los arquetipos de los que hemos hablado en la introducción, para continuar luego con ejemplos relativos a culturas diferentes y a distintas épocas históricas, incluyendo algunos de los ya clásicos como los frisos árabes o las teselaciones de Escher, que utilizamos para un acercamiento naíf a la individuación de las simetrías (fig.1).

I DESCUBRIENDO LOS "ELEMENTOS DE BASE" DE LOS FRISOS: RETICULO Y MALLA ELEMENTAL (ADAGIO).

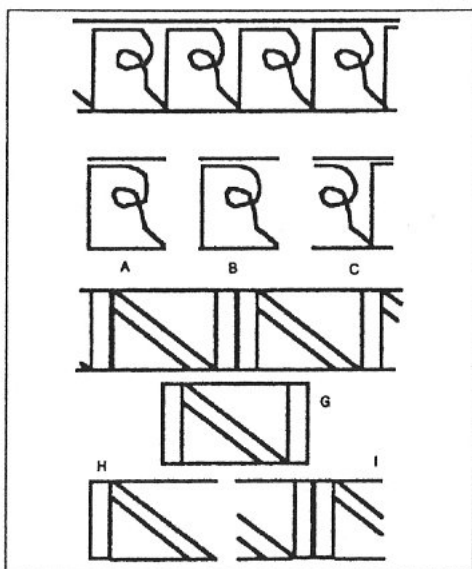
Inicialmente, ante los primeros frisos (como el de la fig. 2, parte superior) los alumnos

reconocen simplemente un dibujo que se repite más veces (la mayoría identifica el dibujo A; pocos el B y ninguno el C, probablemente demasiado escondido).

Figura 1. Estudio de la división regular del plano mediante pájaros. M.C. Escher 1948



Figura 2. Elementos base de los frisos: Reticulo y malla



En los siguientes que se han presentado existe una mayor *libertad* para identificar los posibles *motivos* que pueden generar el friso. De aquí en adelante consideraremos *frisos delimitados por dos líneas paralelas, por lo que ayuda a los alumnos a intuir la estructura geométrica del friso*; de esta manera (fig. 2, parte inferior) resultan más inmediatas tanto la individualización del elemento que se repite (en lugar de G muchos ven una N) como la forma del rectángulo. Usamos momentáneamente el término «chapita» para expresar que ya no es sólo un signo gráfico lo que se repite, sino *una superficie*, en este caso el rectángulo. Nos damos cuenta de que la chapita debe ser *lo más pequeña posible tal que, a través de oportunas repeticiones, genere el friso*.

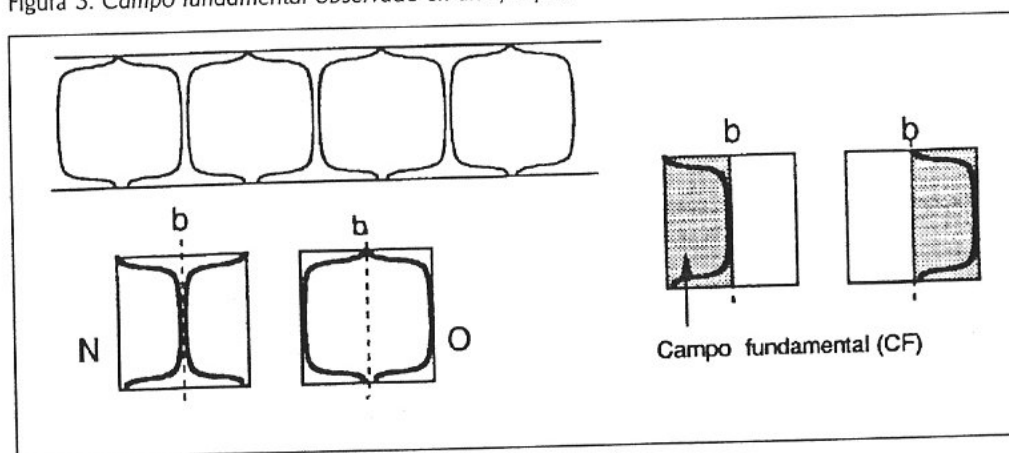
A la luz de estos descubrimientos procuramos identificar las chapitas en algunos de los frisos examinados anteriormente. Para identificar más fácilmente la chapita -y aislarla del resto del friso- usamos antes unas hojas con las que construiremos una *ventana* y luego unas figuritas recortadas de unas cartulinas. Dejando «resbalar» la figurita sobre el friso, notamos que el dibujo que aparece en ella cambia lógicamente en serie. Es sencillo verificar que se obtiene siempre el mismo friso incluso repitiendo fragmentos distintos. Lo verdaderamente importante, por consiguiente, es *individualizar la forma de la chapita y no dejarse distraer por el dibujo que contiene*.

A partir de eso llamamos *retícula* a la red rectangular que se repite y *malla elemental* (fig. 2) al dibujo que se repite. Del mismo modo, fijamos el uso técnico del término friso que hasta este momento ha sido usado como sinónimo de *dibujo* y *tira*. Introducimos la construcción del friso mediante la translación aplicada a la malla en la cual la base de la malla señala el *vector de la traslación*.

■ INDIVIDUALIZAMOS EL CAMPO FUNDAMENTAL Y EL MODULO (ANDANTE)

A continuación se presentan más frisos en los que los alumnos y alumnas reconocen sendos ejes de simetría horizontal (S_a). Por medio de pliegues verificamos que el eje de simetría está presente no sólo en el interior de la malla elemental, sino en todo el friso. Repetiremos dicha verificación en todos los frisos (paso de un análisis local a uno global). En otras series de frisos (figura 3) los estudiantes, con el método de la figurita, distinguen dos mallas distintas (N y O) y en cada una de ellas descubren una simetría axial (S_b) de eje perpendicular al precedente. Con una figurita aislamos después la media malla del friso (a la que está aplicada S_b) y hallamos seguidamente, tanto en N como en O, un rectángulo que contiene el mismo dibujo (módulo). La media figura se llama campo fundamental. Hacemos observar a los estudiantes que no importa tanto cuántas veces y en qué partes del dibujo opere S_b . Lo que cuenta es el haberla individuado: desde nuestro particular punto de vista, en los análisis de los frisos el aspecto matemático debe prevalecer sobre el figurativo.

Figura 3. Campo fundamental observado en un ejemplo.



■ CLASIFICANDO CUATRO FRISOS (CRESCENDO)

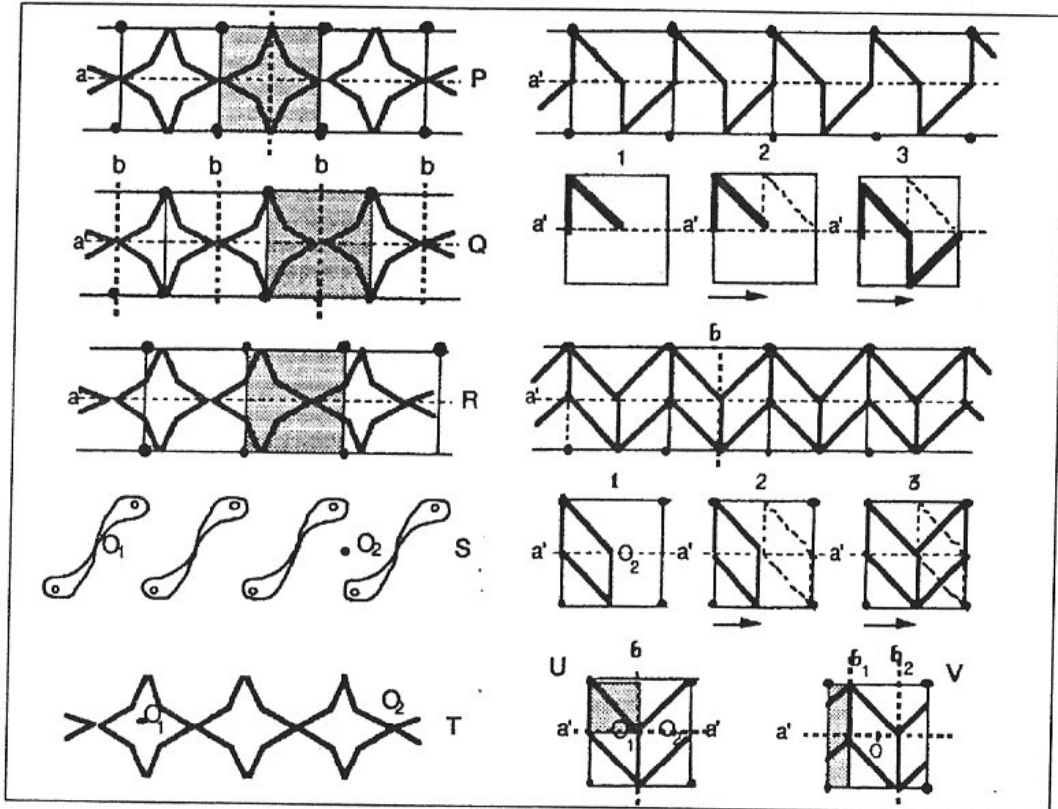
Resumiendo el trabajo desarrollado hasta ahora, los estudiantes llegan a la conclusión de que examinando los frisos desde el punto de vista de las transformaciones isométricas se pueden clasificar los que hemos visto hasta ahora en tres tipos.

Examinando otros frisos (fig. 4, izquierda arriba) vemos que en las situaciones P y Q operan tanto S_a como S_b , y que en ambas el campo fundamental es el mismo. En una tercera situación (R) la malla «permite» el descubrimiento sólo de S_a . Decidimos así que algunas mallas son «mejores» que otras porque permiten encontrar más simetrías en el friso. Por consiguiente, de ahora en adelante buscaremos las situaciones que poseen el máximo de simetrías del friso, y descartaremos las demás. Así, hemos encontrado un cuarto tipo.

■ ENTRA EN ESCENA LA SIMETRÍA CENTRAL (ANDANTE CON BRÍO UN PO' AGITATO)

En el friso S (fig. 4, izquierda abajo) individualizamos únicamente la simetría central

Figura 4. Frisos diversos de los tipos 3, 4 y 5



(O_{180}) en dos puntos diversos (O_1 y O_2) y mediante la consabida tira de papel transparente verificamos de qué modo ésta opera sobre todo el friso. Hemos hallado, por lo tanto, un quinto tipo de friso.

Examinando otra vez el de la fig. 4 (T) desde este nuevo punto de vista vemos que O_{180} opera también sobre él y que, por consiguiente, «aumenta» el número de sus simetrías. Vemos, además, que en todos estos frisos actúa una rotación de 360° que llamaremos *Identidad* (I).

■ UNA «NUEVA» TRANSFORMACIÓN: LA ANTITRASLACIÓN (ANDANTE CON TUTO)

Proponemos otros dos frisos (fig. 4, derecha). Muchos los consideran del quinto tipo, pero una verificación mediante la rotación de una sobre otra de dos tiras superpuestas excluye esta posibilidad. Demostremos que en ambos casos en el interior de la malla elemental dos partes de la misma se corresponden en una *antitraslación* (o simetría de *antitraslación* (a')). De este modo hemos encontrado dos tipos más de frisos: el sexto y el séptimo.

Analizando el del séptimo tipo (fig. 4, U) descubrimos que dos mallas elementales distintas presentan las mismas isometrías, pero distribuidas de distinta forma.

- en U aparecen, además de a' , una S_b y dos O_{180} (O_1 y O_2);
- en V aparecen, además de a' , dos S_b (b_1 y b_2) y una O_{180}

■ LAS SIMETRÍAS «COMPATIBLES» CON EL RETÍCULO (ALLEGRO)

A veces algunos estudiantes identifican simetrías a lo largo de otros ejes c y d en algunos frisos especiales y sacan la conclusión de haber hallado un octavo tipo. Al recordar las ocho simetrías que transforman un cuadrado en sí mismo y proponerlas para el friso que estamos examinando deberíamos notar que éste tendría que *ser transformado en sí mismo*. Doblando una tira a lo largo de un eje c vemos enseguida que esto no sucede. No se trata, pues, de un octavo tipo ya que en realidad es un ejemplo del quinto. Aprovechamos la oportunidad para comunicar a los alumnos y alumnas que los matemáticos han demostrado que existen sólo siete tipos de frisos monodireccionales.

Proponemos, por último, una serie de frisos que tengan la retícula de malla cuadrada para tratar de comprender cómo, de vez en cuando, en los frisos se seleccionan de formas diferentes las simetrías del cuadrado.

■ FASE CONCLUSIVA

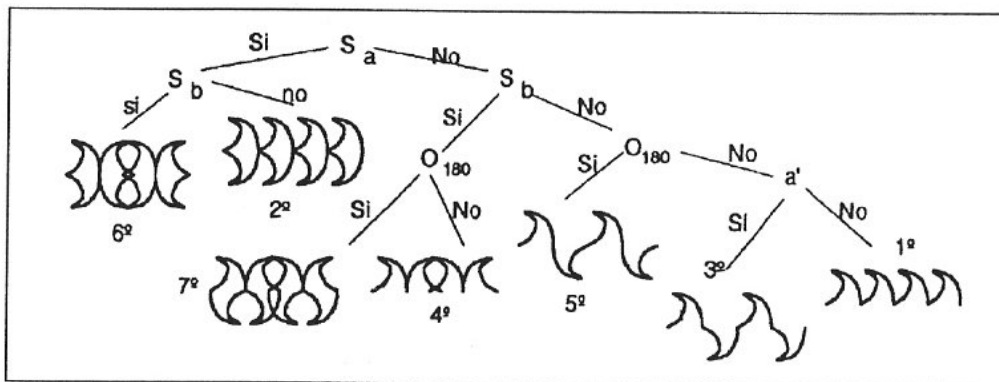
Resumimos los siete tipos de frisos, compilamos la tabla de la distribución de las isometrías y construimos un diagrama en forma de árbol (fig. 5) que nos permite distinguir el tipo de pertenencia.

Se presenta por último una prueba de evaluación. En ella se pide que se clasifique un friso describiendo claramente todos los elementos que permiten identificarlo y, ante dos frisos más, se pide que se argumente lo más claramente posible si son o no del mismo tipo.

■ RECORRIDO MUSICAL (ALLEGRO GIOCO)

A continuación se dan algunas referencias del trabajo musical asociado. Para ello se sigue un trabajo paralelo al matemático.

Figura 5. Árbol de los 7 tipos de frisos unidireccionales en el plano



■ DEL CAMPO FUNDAMENTAL A LA SERIE ORIGINAL

En una primera lección en común (educación musical/ciencias), se coment *un campo fundamental (CF) así como una de sus posibles interpretaciones musicales ya elaboradas por los profesores (llamada serie original, SO) (fig. 9)* de la que se analizan las características y las prescripciones. Digamos que los recuadros en los pentagramas indican las interpretaciones musicales de los desarrollos de los CF. Se examinan en particular los modos mediante los cuales la andadura lineal de un Campo Fundamental (CF) pudiera ser modelada en una Serie Original. (fig. 6).

En la segunda lección se les pide a los alumnos que analicen un segundo CF (proyectado por ellos mediante actividades en LOGO) y que lo interpreten musicalmente elaborando y argumentando individualmente una *SO personal*. Estos dos experimentos forman parte de un programa de trabajo esquematizado en cuatro fases con el fin de elevar el grupo de estudiantes a un buen nivel de autonomía operativa:

- CF y correspondiente SO propuestos por los profesores;
- CF propuesto por los profesores y SO elaborada por los alumnos;
- SO propuesto por los profesores y CF obtenido por los alumnos;
- SO y CF escogidos y elaborados por los alumnos.

■ EL FRISO MUSICAL DEL PRIMER TIPO

Se presenta y se comenta una *Ficha base (fig.7)*. Se trata de un pequeño manual práctico al que se puede acudir para futuros trabajos de decodificación y de composición de simples fragmentos dodecafónicos.

En él se describen algunas posibles elaboraciones melódico-rítmicas de una serie original obtenida de un CF muy sencillo que están dispuestas sobre siete pentagramas contraseñados por letras; cada uno de ellos contiene una nueva variación según este esquema


Figura 6. Campo fundamental y serie original musical elaborada.

Figura 7. Ficha Base.

MUSICA : Construcción de la melodía dodecafónica (Ficha base)

REFERENCIA GEOMETRICA: Del CF al friso unidireccional del 1er Tipo

SERIE ORIGINAL (CAMPO FUNDAMENTAL)



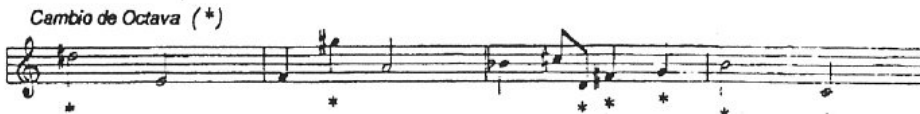
Datos de los valores (duración) en la serie: Creación de un ritmo.

Oa



Cambio de Octava (*)

Ob




Posibilidad de repetir notas e inserción de pausas (efectos o punteo)

Oc




Disminución rítmica

Od



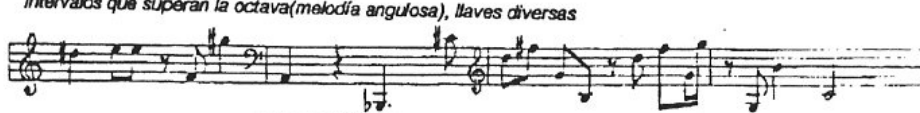
Embellecimiento (Excepción en el ejemplo C) nota de regreso repetición

Oe




Intervalos que superan la octava (melodía angulosa), llaves diversas

Of



Sonidos homólogos chiave di basso

Og



(en el dibujo, O indica la Serie Original).

- Oa: Variación de duración. El esquema árido de la SO se convierte en un «tema».
- Ob: Sustitución de un intervalo por un cambio de octava.
- Oc: Repetición de una nota, antes de que se toque la nota siguiente (salvo las excepciones introducidas en Oe) y uso de pausas.

Figura 8. Friso musical del 1er tipo (FB2)

MUSICA : Descubrimos e indicamos la elaboración de la SO

REFERENCIA GEOMETRICA: Friso unidireccional del 1er Tipo (S,I,T)

1 Ob

5

8

11

13

Completa la estructura del esquema dodecafónico siguiente

Ob							
----	--	--	--	--	--	--	--

- Od: Disminución y variación rítmica.
- Oe: Embellecimientos como el trino, el trémolo y las notas de Repetición de una parte de la serie (que representa una excepción a la Oc).
- Of: Utilización de Intervalos más allá de la octava y «clave de bajo» (que generan la llamada melodía «angolosa»).
- Og: Sonidos homólogos.

Inmediatamente después proponemos a los estudiantes la lectura y el análisis de un

fragmento dodecafónico construido con alguna de las siete elaboraciones de la FB -en un orden distinto- pidiéndoles después que las reconozcan. A continuación se propone (fig. 8, derecha) un *friso musical del primer tipo* (la analogía con el friso gráfico consiste en la «traslación» de la SO, obviamente en continua variación, obediente a los dos principios fundamentales de la dodecafonía: la no repetición y el desarrollo sucesivo); los alumnos y alumnas deben descubrir la estructura del fragmento e indicarla en las casillas preparadas a pie de página.

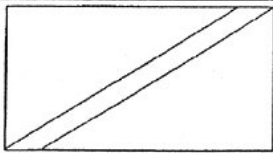
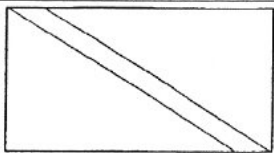
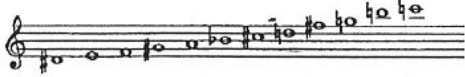

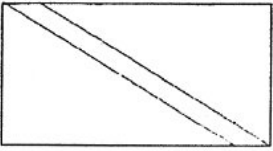
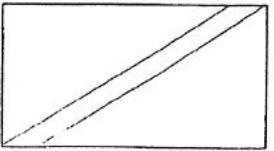
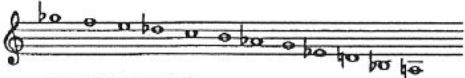
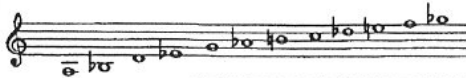
■ FRISO MUSICAL DEL SEGUNDO TIPO

Para introducir *el friso musical del segundo tipo*, presentamos la SO creciente y su inversa (de ahora en adelante SI) descendiente. Dicha simetría de la serie musical se asocia con una simetría de eje horizontal. Del mismo modo distribuimos y analizamos una segunda *Ficha Base* (FB1) que contiene algunas elaboraciones melódico-rítmicas sobre la serie inversa. Seguidamente presentaremos la FB 2, que propone para la SI una actividad de reconocimiento análoga a la desarrollada por la FB 1a con la SO y luego la FB 2b que contiene un *contrapunto dodecafónico* que el alumnado tendrá que analizar para -también en este caso- intentar descubrir las variaciones utilizadas.

■ LAS OTRAS «SIMETRÍAS» DE LA MÚSICA DODECAFÓNICA

Procediendo de la misma manera con los otros frisos musicales, se proponen en el momento oportuno las otras dos «simetrías» que originan *la serie retrógrada* y *la serie retrógrada invertida* (fig. 9).

Figura 9. Imagen correspondiente a las series O, I, R, RI.

	
<p>SERIE ORIGINAL (O)</p> 	<p>SERIE RETROGRADA (R)</p> 
	
<p>SERIE INVERTIDA (I)</p> 	<p>SERIE RETROGRADA INVERTIDA (RI)</p> 

Desde este momento la actividad continúa llevando a los alumnos y alumnas al descubrimiento de los sucesivos frisos musicales, análogamente a lo que se ha hecho con los frisos gráficos. Se usan unas secuencias de fichas idénticas en su estructura a las dos primeras, como pueden verse en el cuadro siguiente.

FICHA BASE	FICHA DE TIPO a	FICHA DE TIPO b
Contiene 7 elaboraciones de la serie de salida (SO, SI, SR, SRI). (SO, SI, SR, SRI).	Contiene alguna de las elaboraciones de la FB, pero dispuestas en otro orden y unidas formando un fragmento.	Contiene una nueva composición que utiliza los procedimientos de elaboración expuestos en las FB
Los alumnos deben entenderlas.	Los alumnos deben reconocer las elaboraciones	Los alumnos deben analizarla y descodificarla

Excepto en los frisos del primero y del cuarto tipo, en los demás aparecen transformaciones como la simetría de eje horizontal a, simetrías centrales y «simetrías de deslizamiento» que «doblan en vertical» el campo fundamental y, en consecuencia «generan» *frisos musicales a dos voces* (el tercero y el quinto) y *polifónicos* (el segundo, el sexto y el séptimo).

■ ILUSTRACIÓN DE UN FRISO MUSICAL DEL SÉPTIMO TIPO

Para concluir la fase preliminar de la actividad (la exposición de los rudimentos de la técnica dodecafónica y de sus prescripciones) «montemos» con los estudiantes un friso musical del séptimo tipo (Fig. 10). Comenzamos con la creación de un *tema dodecafónico* que llamamos *malla elemental musical* y lo «trasladamos» usando los principios de la elaboración melódica expuestos en la Ficha Base.

Así mismo, se busca obtener melodías diversas dándoles un carácter tradicional o la angulosidad fundamental de la música dodecafónica.

■ FASE PRODUCTIVA

La fase final del trabajo trae consigo la división del alumnado en siete grupos. Cada grupo acuerda con los profesores el tipo de friso sobre el que deberá trabajar. Escoge un CF original y elabora la correspondiente SO; posteriormente pasa a su interpretación musical. Una vez terminadas las fases de proyección, de elaboración, de edición mediante el ordenador y de corrección, cada grupo presenta su propio «friso musical» al resto de la clase.

I OBSERVACIONES FINALES

Imaginemos que, llegados a este punto, algún lector haya podido considerar interesante esta actividad pero difícil de gestionar. Ciertamente, deben considerarse algunas condiciones: un sistema escolar que apruebe la posibilidad de realizar actividades interdisciplinares;

Figura 10. Diálogo melódico a partir de una malla de friso gráfico musical del 7º tipo.

MUSICA: Diálogo melódico en dos partes

REF. GEOMETRICA: Friso unidimensional del 7º tipo (simetria: Sb, 0180, Aa') 180, Aa')

un determinado gusto del matemático por la música y del músico por la matemática; un interés de fondo común por el *arte gráfico*; tener la posibilidad de trabajar en la escuela con programas de ordenador adecuados y con una instalación de alta fidelidad.

Una vez cumplidas estas condiciones, podemos testimoniar que a medida que se profundiza en estas experiencias crece -tanto en los profesores como en gran parte del alumnado- *el gusto por la investigación y el placer del descubrimiento*. Por mantenernos en el terreno de la geometría es innegable que el hecho de encontrar en situaciones estéticamente muy bellas (constituidas tanto por frisos como por teselaciones) unos soportes geométricos a menudo imprevistos representa un momento de notable fascinación. Ello puede inducir a un embrional refinamiento de su sensibilidad y a una mayor comprensión de lo que podríamos llamar estructura escondida de una producción artística (gráfica o musical).

Por lo que respecta al aspecto musical del itinerario seguido, señalemos que el trabajo (cuya duración no ha sido interferida por otras actividades musicales como la *audición y la interpretación de conjunto*), en sus fases más avanzadas, ha implicado fundamentalmente a los alumnos y alumnas más débiles y menos motivados. Por otra parte, se trataba de un trabajo de gran complejidad, y por ello hemos puesto mucha atención en programar una gran variedad de *estímulos* asignando *trabajos distintos* a cada persona del grupo de forma muy organizada.

Sin embargo subrayemos que la indiscutible dificultad que acabamos de poner en evidencia no ha sido tanto una característica intrínseca del itinerario elaborado como el resultado de una precisa elección pedagógica sustentada por muchos investigadores. En base a ello, hemos considerado productivo introducir a los alumnos -durante un período y con modalidades cuidadosamente definidas- en una serie de prestaciones significativas de nivel avanzado, considerando que éstas -incluso por su elevado contenido lógico, en términos de análisis, confrontación y clasificación- pueden favorecer también a los estudiantes más débiles.

Como hipótesis de trabajo, la actividad desarrollada por nosotros sobre los frisos musicales dodecafónicos podría ser extendida a *otros géneros de la música* (cánon, fuga, minuetto, sinfonía); *únicamente a los parámetros del sonido* (altura, duración, intensidad, timbre); *al ritmo* (a las danzas medievales y del renacimiento y a la música de discoteca); *a otros lenguajes distintos al musical* (gráfico, arquitectónico, poético, corpóreo).

Referencias Bibliográficas

- BOSSARD, Y. *Rosaces, frises et pavages*. Paris: Cedic, 1977.
COLLONG M; TREHARD, F. *Mosaiques et isométries*. Paris: Cedic, 1983.
DELAMONT, G. *Técnica moderna di dodecafonía*. Milano: Edizione Piccolo Conservatorio Nuova Milano Musica, 1973.
ERNEST, B. *El espejo mágico de M.C.Escher*, Fribourg: Medea, 1987. (Traducción española en 1994). Berlín: Taschen, Verlag.
GILARDI, M. *Ritmi e Simmetrie*. Bologna: Zanichelli, 1984.
JACHINO, C. *Técnica dodecafónica*. Milano: Edizioni Curci, 1982.
MEDICI CAFFARRA, D; et al. *Matemática e Musica*. Le Scienze, 1983, 6, 59-69.
MALARA, N; PELLEGRINO, C. «Logo in the teaching of mathematics, problems, experiences and requests» en *Calabresa E. proc. EUROLOGO*. Parma, 1991, 91, 507-530.

Nota.

1. Este trabajo ha sido presentado en el XIV Congreso Nacional Italiano intergrupos; Escuela media (11-14 años) de Bocca di Magra (La Spezia), en marzo de 1993 y en el 22º Congreso Internacional GIRP (Groupe International de Recherche en Pédagogie de la mathématique) de Ávila (España) en julio de 1993.