Progetto ArAl
Percorsi nell'aritmetica per favorire il pensiero pre-algebrico

Giancarlo Navarra

GREM di Modena

1. Introduzione

La letteratura internazionale nel campo delle ricerche sull'apprendimento dell'algebra e sulle difficoltà ad esso connesse - a livelli di età differenti, dagli inizi sino all'università - evidenzia la diffusione della crisi dell'insegnamento tradizionale di questa disciplina. Vengono individuate ragioni di tipo *cognitivo* (il salto "in sé" difficile verso la generalizzazione e il pensiero simbolico), *psicologico* (l'algebra intimorisce studenti frustrati da un rapporto già difficile con l'aritmetica), *sociale* (le famiglie, e più in generale l'ambiente, trasmettono consciamente o inconsciamente ai figli atteggiamenti definibili come 'matematofobici'), *pedagogico* (gli studenti sembrano sempre meno educabili, perché meno motivati verso lo studio soprattutto quando – come nel caso dell'algebra – vengono richieste prestazioni di ordine superiore), *didattico* (gli insegnanti della scuola media – dove tradizionalmente si comincia ad insegnare l'algebra – non possiedono in genere una formazione matematica e quindi ripetono sostanzialmente l'algebra appresa alla scuola superiore). Certamente ognuna di queste ragioni contiene una frazione di verità e può interferire negativamente con lo studio dell'algebra; la nostra prospettiva ne tiene conto, ma fa riferimento ad un quadro di partenza profondamente diverso. Riteniamo cioè che i principali ostacoli cognitivi si collochino *in campo pre-algebrico*, e che molti di *essi nascano in modi insospettabili in contesti aritmetici* e pongano in seguito ostacoli concettuali spesso insormontabili allo sviluppo del pensiero algebrico. Numerosi fra gli studi più recenti in campo internazionale sulla didattica dell'algebra mostrano come gli studenti difettino di appropriate strutture aritmetiche dalle quali generalizzare e come, senza la consapevolezza delle procedure in aritmetica e del modo in cui esse nascono, non possiedano una base concettuale sulla quale costruire le loro conoscenze algebriche.

In questa prospettiva, i problemi della didattica dell'algebra elementare si pongono pertanto a due livelli:

(a) quello della costruzione delle *conoscenze aritmetiche di base*;

(b) quello della costruzione delle *conoscenze algebriche*.

Al primo livello (corrispondente sostanzialmente alla scuola elementare e ai primi due anni della media*) non si tiene sufficiente conto del passaggio all'algebra*; al secondo (corrispondente tradizionalmente alla terza media) *si tende a concentrare un'eccessiva attenzione sui processi di calcolo.* Il risultato è che l'algebra non viene costruita in lenta progressione come strumento e oggetto di pensiero, ma ne vengono esaltati soprattutto i meccanismi manipolativi e gli aspetti computazionali. Di conseguenza essa perde alcune delle sue caratteristiche essenziali: da un lato, di linguaggio adatto a descrivere la realtà e, dall'altro, di potente strumento di ragionamento e di previsione attraverso la *messa in formula* di conoscenze (o di ipotesi) sui fenomeni (nel nostro caso elementari) e la *derivazione di nuove conoscenze* sui fenomeni stessi mediante trasformazioni consentite dal formalismo algebrico.

Si ritiene quindi non solo che siano necessarie modifiche profonde nell'insegnamento dell'algebra al livello di età degli alunni della scuola media inferiore, ma che sia anche opportuno *anticipare alla scuola elementare l'approccio a tali problemi cominciando dall'individuazione delle concezioni didattiche più produttive per favorire il passaggio dal pensiero aritmetico a quello algebrico.*

Vediamo alcuni esempi di quanto stiamo dicendo.

2. Esempi

2.1 Diverse rappresentazioni di un numero

Tra le infinite rappresentazioni di un numero, quella *canonica* è – per ragioni ovvie – la più 'gettonata'. Pensare un numero significa, per chiunque, pensare alla sua *cardinalità*. Questa ragionevole ovvietà rischia però di consolidare uno stereotipo e di porre quindi delle barriere all'espansione del pensiero matematico nel passaggio dall'aritmetica all'algebra. La rappresentazione canonica è *opaca di significati,* nel senso che all'alunno *dice poco di sé*. Per esempio: la scrittura '12' suggerisce un generico 'numero di cose', tutt'al più l'idea di 'parità'. Altre rappresentazioni – adeguate alle età – possono ampliare il campo delle informazioni: '3×4' evidenzia che si tratta di un multiplo sia di 3 che di 4; '$2^2 \times 3$', che è anche un multiplo di 2; '$2 \times 2 \times 3$' conduce ''2×6' e quindi al multiplo di 6; 36/3 o 60/5 che è sottomultiplo di altri numeri, inserito sotto radice nella forma $\sqrt{2^2 \times 3}$ aiuta a passare a $2\sqrt{3}$, e così via. Possiamo dire che ognuna delle possibili connotazioni di un numero aggiunge informazioni utili per un approfondimento della sua conoscenza come avviene per le persone:

Giancarlo, il papà di Alice, il marito di Cosetta, il professore di matematica, l'autore di questo articolo, l'amico di Francesco, the Italian speaker, e così via rappresentano uno stesso soggetto da più punti di vista ampliandone la conoscenza rispetto al 'canonico' "Giancarlo Navarra". Vedremo in seguito in un esempio concreto come abituare gli alunni a concepire come 'numero' non solo '12' ma anche '9 + 3' o '$2^2 \times 3$' sia un passaggio importante verso la soluzione di certe famiglie di problemi e la comprensione di scritture come 'a + b' o 'x^2y'.

2.2 L'uguale

Nell'insegnamento dell'aritmetica alla scuola elementare l'uguale esprime essenzialmente il significato di *operatore direzionale*. 4 + 6 = 10 per l'alunno significa: sommo 4 e 6 e trovo 10. Questa concezione è dominante per i primi sette, otto anni di scuola durante i quali l'uguale possiede una connotazione dominante *spazio temporale*: prepara la conclusione di una *storia* che va letta <u>da sinistra verso destra</u> (si eseguono sequenzialmente delle operazioni) sino alla sua conclusione (e <u>infine</u> si ottiene un risultato). Poi, tradizionalmente in terza media, l'alunno incontra l'algebra, e l'uguale improvvisamente assume un significato del tutto diverso: indica *l'equivalenza fra due quantità*. In una scrittura come '8 + x = 2x – 5' esso assume un significato *relazionale*, e contiene un'idea *di simmetria fra due scritture*. Lo studente deve improvvisamente muoversi (spesso senza che nessuno lo abbia "avvertito" di questo ampliamento di significati) in un universo concettuale del tutto differente, nel quale è necessario andare *oltre* la familiare connotazione spazio temporale. Ma se la concezione dello studente è che 'il numero dopo l'uguale è il *risultato'* è probabile che per lui una scrittura come '11 = n' significhi ben poco, anche se magari sa risolvere l'equazione di primo grado che conduce ad essa.

2.3 Le proprietà delle operazioni

In genere, nella normale didattica della matematica nella scuola primaria e in quella secondaria le proprietà delle operazioni vengono relegate all'interno di una nicchia standardizzata e poco significativa. La proprietà commutativa è intuitiva, e quella associativa è facilmente comprensibile. L'osso duro è rappresentato dalla proprietà <u>distributiva</u> della moltiplicazione o quella a destra della divisione , difficile alla scuola elementare ma di uso frequentissimo in algebra, dove spesso però non viene presentata in quanto tale, ma come qualcosa di completamente nuovo anche nel nome: *estrazione o raccoglimento a fattor comune*.

Vedremo ora come questi e altri nodi dell'aritmetica e dell'algebra così fittamente intrecciati possano essere affrontati nella prospettiva di un approccio *linguistico* alla didattica della matematica.

3. La matematica come linguaggio

Abbiamo parlato in precedenza della necessità di individuare le concezioni didattiche più produttive per favorire il passaggio dal pensiero aritmetico a quello algebrico; fra le prime, riteniamo che vi siano quelle legate alle relazioni fra il *linguaggio naturale* e quello *matematico*, ben sapendo quanto sia stretto il rapporto tra la capacità di esprimere correttamente una proposizione nel linguaggio *naturale* e quella di formularla in linguaggio *algebrico*. Si può affermare che le prime difficoltà nell'affrontare lo studio dell'aritmetica – e in quello dell'algebra – sono di ordine linguistico: organizzare un discorso, coordinare frasi, descrivere oggetti e situazioni, dare definizioni, riconoscere enunciati, seguire un ragionamento, argomentare la soluzione di un problema. In altre parole, si dovrebbe favorire l'incontro con l'algebra come con un linguaggio che non solo consente di descrivere la realtà ma ne *amplifica la comprensione*. Questo processo dovrebbe avvenire molto lentamente, attraverso un intersecarsi di continuità e di fratture fra un livello e l'altro della conoscenza matematica.

Come ogni linguaggio, anche quello matematico possiede una sua *grammatica*, ossia un insieme di convenzioni che consente di costruire correttamente delle frasi (che talvolta può variare, anche se di poco: la didattica italiana usa separare le coordinate di un punto mediante una virgola, in altri paesi si preferisce il punto e virgola, per non creare confusione quando si usano coordinate decimali). Possiede una *sintassi*, che fornisce le condizioni – ossia le regole – per stabilire se una successione di elementi linguistici è 'ben formata' (per esempio, sono sintatticamente *scorrette* frasi come "9 + + 6 = 15" o "5 + 3 = 8 : 2 = 4 + 16 = 20"). Possiede una *semantica*, che permette di interpretare dei simboli (all'interno di successioni sintatticamente corrette) e successivamente stabilire se le espressioni sono vere o false (per esempio la frase "1 + 1 = 10" è vera o falsa a seconda della base di calcolo; è falsa nel sistema a base 10, vera in quello a base 2).

In merito a quale delle due analisi – quella sintattica o quella semantica – debba precedere l'altra, possiamo capirlo riflettendo su una frase piuttosto conosciuta a chi si occupi di questi argomenti; prima di proseguire, invitiamo il lettore a soffermarsi brevemente sul significato che le attribuisce:

“Una vecchia porta la sbarra”

Le interpretazioni possibili sono due:

“Una vecchia (donna) porta la sbarra”

“Una vecchia porta sbarra la (stanza, strada, …) ”

Le due interpretazioni conducono a diverse analisi sintattiche:

“Una vecchia (soggetto) – porta (predicato verbale) – la porta (complemento oggetto)”

“Una vecchia porta (soggetto) – la (complemento oggetto) – sbarra (predicato verbale)”

La conclusione alla quale vogliamo giungere è che *l’analisi sintattica segue necessariamente quella semantica* e le implicazioni di questa affermazione sono, come vedremo fra poco, molto rilevanti.

Nella prospettiva che stiamo considerando, *tradurre* delle frasi dal linguaggio naturale (o grafico, o iconico) a quello matematico e viceversa rappresenta uno dei territori più fertili all’interno dei quali si possono sviluppare le riflessioni sul linguaggio matematico. Tradurre in questo caso significa interpretare e *rappresentare* una situazione problematica mediante un linguaggio formalizzato o, al contrario, riconoscere in una scrittura simbolica la situazione che essa descrive.

Nella didattica tradizionale dell’algebra si comincia privilegiando lo studio delle *regole*, come se la manipolazione formale fosse in qualche modo indipendente dalla comprensione dei significati. *Si tende cioè ad insegnare la sintassi dell’algebra trascurando la sua semantica,* invertendo in tale modo quel ‘diritto di precedenza’ dell’analisi semantica su quella sintattica di cui abbiamo parlato poc’anzi. I modelli mentali propri del pensiero algebrico dovrebbero essere costruiti sin dai primi anni della scuola elementare nei quali il bambino comincia ad avvicinarsi al pensiero aritmetico insegnandogli a *pensare l’aritmetica algebricamente*. In altre parole, costruendo in lui il pensiero algebrico *progressivamente* come strumento e oggetto di pensiero *parallelamente* all’aritmetica, partendo dai suoi *significati,* attraverso la costruzione di un ambiente che stimoli in modo informale l’elaborazione autonoma di una sorta di ‘balbettio algebrico’ e quindi l’appropriazione sperimentale, continuamente ridefinita, di un nuovo linguaggio nel quale le *regole* possano trovare la loro collocazione altrettanto gradualmente, all’interno di un contratto didattico tollerante verso momenti iniziali sintatticamente ‘promiscui’ che favorisca una sensibilità consapevole anche verso questi aspetti del linguaggio matematico.

4. Il Progetto ArAl[1]

Sulla base di questi presupposti nel 1998, dopo un anno 'esplorativo', ha preso l'avvio il Progetto ArAl con la consulenza scientifica della prof. Nicolina Malara, docente del Dipartimento di Matematica dell'Università di Modena e direttore del GREM (Gruppo di Ricerca in Educazione Matematica) operante presso quella università. Il progetto si innesta in uno precedente e più ampio, rivolto alla scuola media in ottica di continuità con la scuola secondaria superiore, diretto dalla prof. Malara e realizzato in stretta collaborazione con le insegnanti ricercartici del GREM Rosa Iaderosa e Loredanan Gerpelli (v. Riferimenti bibliografici) Attualmente partecipano al progetto ArAl nove scuole (4 Istituti comprensivi, 3 Direzioni didattiche, 2 Scuole medie e un Istituto superiore con il compito di curare la messa a punto informatica del progetto), 66 docenti e quasi 1500 alunni (1200 di scuola elementare e 300 di scuola media).

I coordinatori del gruppo (Giancarlo Navarra e Antonella Giacomin) svolgono un'attività annuale in compresenza con insegnanti di scuola elementare in 12 classi (dalla seconda alla quinta elementare) per complessive 140 ore. Durante tali compresenze vengono proposte delle attività; i coordinatori esercitano il ruolo di ricercatori – sperimentatori e gli insegnanti di classe svolgono prevalentemente attività di osservatori – verbalizzatori. I diari prodotti in tale modo vengono riorganizzati alla fine di ogni anno scolastico in Fogli di lavoro raggruppati in Unità che vengono a loro volta sperimentate dal gruppo l'anno successivo; ogni Foglio contiene una traccia molto flessibile di attività accompagnata da un commentario costituito da indicazioni di tipo teorico e osservazioni raccolte nelle classi, utilizzabili come 'avvisi ai naviganti' per spunti di lavoro, riflessioni, espansioni e così via. Le Unità, una volta uscite da questa seconda verifica, possono essere messe a disposizione di docenti esterni al gruppo. Entro la primavera del 2001 dovrebbe diventare operativo un apposito sito WEB.

Un ultimo aspetto di grande importanza è rappresentato dalla ricerca delle connessioni fra le attività proposte dal progetto e il curricolo di matematica per la scuola elementare, con lo scopo di individuare le modalità per una progressiva integrazione fra i due. Questo aspetto è molto sentito dagli insegnanti perché, se da un lato riflette il timore diffuso di dover *'fare spazio all'algebra'* all'interno di un programma considerato fin troppo ampio, rappresenta allo

[1] Il progetto ArAl rappresenta uno dei contributi italiani ai lavori del progetto Comenius coordinato dal prof. Leo Rogers al quale partecipano Gran Bretagna (Faculty of Education, Roehampton Institute, Londra), Cipro (Pedagogical Institute, Nicosia), Repubblica Ceka (Mathematics Department, Pedagogical Institute, Charles University, Praga) e Italia (Dipartimento di Matematica, Modena).

stesso tempo l'opportunità per *una riflessione sulle proprie conoscenze e sulle proprie convinzioni in campo matematico per giungere ad una rilettura critica di contenuti, metodi, strategie.*

5. Le Unità

Sono in avanzata fase di definizione cinque Unità;

UNITÀ 1: "LA GRIGLIA 0-99"

seconda elementare → terza media

L'itinerario comincia con l'esplorazione di un quadrato di cento caselle numerate da 0 a 99; successivamente - attraverso la scoperta di regolarità (possibilità di utilizzo di grafi), attività di supporto al calcolo mentale, giochi su 'percorsi numerici' ('La mappa del tesoro', 'Il gioco dell'isola', 'L'isola che non c'è'), soluzione di svariate situazioni problematiche anche su griglie di dimensioni differenti, riflessioni su modi diversi di rappresentare i numeri nelle caselle – si procede verso la generalizzazione attraverso l'uso delle lettere sino alla 'conquista' della griglia n x n.

Gli alunni devono superare difficoltà concernenti il calcolo mentale e scritto, la verbalizzazione dei processi mentali, il confronto fra argomentazioni o fra rappresentazioni; i più grandi affrontano argomenti che difficilmente rientrano negli argomenti trattati assieme ad alunni di scuola media, pur rivestendo un ruolo importante nello sviluppo dello studio dell'algebra.

UNITÀ 2: "LE PIRAMIDI DI NUMERI"

(prima elementare → terza media)

L'itinerario comincia con semplici piramidi di tre mattoni per il rinforzo del concetto di operazione diretta e inversa (addizione e sottrazione); vengono successivamente esplorate e risolte piramidi di sei mattoni contenenti inizialmente numeri interi e poi anche decimali (possibilità di soluzione mediante semplici calcoli, per tentativi ordinati, problemi impossibili o con più di una soluzione). Problemi via via più complessi con la piramide di dieci mattoni conducono alle piramidi risolvibili per via algebrica (lettera come incognita), alla scoperta delle relazioni fra i numeri alla base e la somma al vertice, e all'analisi e alla classificazione delle 'condizioni di risolvibilità' di una piramide. Si procede aumentando il numero dei mattoni sino alla generalizzazione con una piramidi di n mattoni (lettera come variabile, triangolo di Tartaglia). Le piramidi più ‘avanzate’ contengono numeri relativi.

L’itinerario esalta l’osservazione, l’esplorazione, la riflessione e l’argomentazione in situazioni problematiche facenti riferimento a differenti insiemi numerici; si favoriscono il confronto tra strategie (per tentativi e altre più evolute di avvio al pensiero algebrico) e il passaggio graduale verso la scoperta delle regolarità e la generalizzazione con il ricorso alle lettere.

UNITÀ 3: “I PROBLEMI PER / DA BRIOSHI[2]”

seconda elementare → prima media

L’itinerario comincia proponendo attività di traduzione dal linguaggio naturale a quello aritmetico e viceversa di frasi del tipo “A 4 togli 2” coinvolgendo progressivamente le quattro operazioni (individuazione di scritture equivalenti e non, confronto fra parafrasi). Si passa alle traduzioni connesse con il ‘gioco del numero nascosto (“Penso a un numero, gli tolgo 3 e rimane 8. Qual è il numero?”). Si comincia poi ad inviare problemi di questo tipo al Brioshi virtuale (o, dove possibile, attraverso l’uso della posta elettronica, a ‘Brioshi’ di classi reali). Le attività prevedono anche scambi di messaggi fra gli alunni della stessa classe attraverso giochi di traduzione e di interpretazione, correzioni incrociate, analisi collettiva delle scritture equivalenti, e così via.

Si privilegia l’approccio agli aspetti linguistici della matematica, favorendo la riflessione sugli aspetti relazionali fra gli elementi di un problema o di una scrittura matematica (impliciti nel ‘rappresentare’) e su quelli procedurali (impliciti nel ‘risolvere’ un problema); sul linguaggio simbolico (aspetti sintattici e semantici, convenzioni – è noto che Brioshi comprende solo il linguaggio matematico).

UNITÀ 4: “DALLA BILANCIA A PIATTI ALLA SCOPERTA DELL’EQUAZIONE”

quinta elementare → prima media

Attraverso la soluzione collettiva di situazioni problematiche con la bilancia si scoprono il ‘principio dell’equilibrio’ e i due princìpi di equivalenza; il passaggio dall’attività sperimentale con la bilancia alla sua rappresentazione sulla carta conduce gli alunni alla ‘scoperta’ delle lettere in matematica e dell’equazione. Anche gli algoritmi per la soluzione

[2] Brioshi è un alunno giapponese virtuale inventato in una prima media partecipante al progetto, con il quale si scambiano messaggi, necessariamente in linguaggio matematico. Il ricorso a Brioshi è molto potente e viene adottato costantemente in tutte le classi del progetto.

dell'equazione vengono elaborati dagli alunni e raffinati progressivamente attraverso attività sia collettive che individuali. Successioni di problemi verbali opportunamente organizzati a livelli di difficoltà crescenti conducono gli studenti ad investigare sui problemi risolvibili algebricamente.

L'attività costituisce un approccio al pensiero algebrico attraverso processi di costruzione collettiva delle conoscenze; gli alunni elaborano e confrontano rappresentazioni differenti, affinano competenze relative alla traduzione dal linguaggio naturale a quello simbolico e viceversa, esplicitano proprietà delle operazioni, si abituano all'uso della lettera come incognita.

UNITÀ 5: "I PROBLEMI CON LE LETTERE"

seconda elementare → *prima media*

Si comincia con semplici situazioni di contenuto aritmetico da rappresentare in linguaggio matematico (sono problemi non a livello cognitivo, perché non c'è un risultato da trovare, ma a livello metacognitivo, perché comportano una *traduzione*). Si passa poi a problemi "veri" con un dato mancante; la consegna è la stessa ("Rappresenta") e gli alunni sono condotti alla scoperta del simbolo al posto del numero sconosciuto. La discussione e il confronto collettivo fra le rappresentazioni proposte dagli alunni (icona, lettera, punto interrogativo, spazio vuoto, puntini, casella quadrata vuota, ecc.) li porta progressivamente a ragionare su un linguaggio che va 'al di là' di quello aritmetico. Si continua con sequenze di situazioni problematiche che stimolano la riflessione attorno ai significati delle scritture simboliche, ad es: dal problema all'equazione che lo rappresenta e viceversa (individuazione di classi di problemi); dover scegliere, fra alcune equazioni (es: $10 - a = 4$; $10 = a + 4$; $a = 10 + 4$; $a - 4 = 10$), quella/e che rappresenta/no correttamente un certo problema, e così via.

Si privilegiano gli aspetti della traduzione dal linguaggio naturale a quello matematico e viceversa, si cominciano a cogliere le differenze e le uguaglianze fra scritture differenti, si accostano i due significati dell'= (operatore direzionale, simbolo di equivalenza), si cominciano a delineare i diversi atteggiamenti che caratterizzano il 'rappresentare' (cogliere gli aspetti relazionali) e il 'risolvere' (privilegiare gli aspetti procedurali).

6. Divulgazione dei materiali e sito Web

Uno dei principali aspetti del progetto è rappresentato attualmente dalla <u>necessità di produrre</u>

dei materiali utilizzabili all'esterno del gruppo impegnato nel progetto ArAl. Il passaggio verso la divulgazione è fisiologico in attività di sperimentazione didattica, nel momento in cui si ritenga che la filosofia del progetto e i materiali elaborati possano essere offerti al vaglio critico di una comunità più ampia rispetto a quella rappresentata dal gruppo stesso, dai docenti ai ricercatori e agli specialisti nel campo della didattica della matematica.

Per queste ragioni:

(a) in fase di sperimentazione la messa in video di alcuni momenti delle attività svolte in classi del gruppo; è attualmente pronto un primo video didattico su un'attività svolta in una quinta elementare (tema: intersezione fra l'Unità della bilancia e quella della piramide di numeri).

(b) è stata avviata la collaborazione con un Istituto Superiore che, attraverso un team di docenti e studenti svolgerà un importante ruolo di supporto tecnologico al progetto attraverso più forme:

1) consulenza per quanto concerne lo scambio di documenti via E-mail fra gli istituti che aderiscono al progetto (aspetto fondamentale perché garantisce il controllo della progressione sia culturale che organizzativa dell'attività);
2) potenziamento della strategia di utilizzare la posta elettronica per lo scambio fra le classi di messaggi in linguaggio matematico secondo il 'modello Brioshi';
3) messa in rete dei materiali ArAl attraverso la progettazione di un sito Web;
4) collegamento con il sito Web internazionale del Progetto Comenius;
5) formazione dei docenti in relazione alle competenze di base per la gestione di un sito WEB

Il laboratorio

Nel corso del laboratorio verranno analizzati alcuni temi del progetto attraverso l'esame di parti significative delle Unità.

Riferimenti bibliografici

La bibliografia sui temi trattati è molto vasta e le pubblicazioni sono spesso di difficile reperibilità per gli insegnanti. In questa stesura non definitiva dell'articolo inseriamo solamente le pubblicazioni del GREM pubblicate, o in pubblicazione, su riviste italiane.

BAZZINI L., IADEROSA, R.: 2000, *Insegnamento-apprendimento dell'algebra,* Franco Angeli, Milano

GHERPELLI L., NAVARRA G.: 1997, Quale algebra nella scuola media?, in *Atti del XVIII Convegno Nazionale UMI,* Campobasso, 1997, 174-181

MALARA N.A.: 1994, Il pensiero algebrico: come promuoverlo sin dalla scuola dell'obbligo limitandone le difficoltà?, Atti conv. naz. *"Dalla Ricerca Teorica alla Pratica Didattica"* Castel S. Pietro (BO), ora anche in *Educ. Matem*, 1996, anno XVII, serie V, vol. 1, 80-99
MALARA N.A.: 1997, Problemi nel passaggio Aritmetica-Algebra, *Matem. e sua Did.*, vol. 2, 176-186
NAVARRA G.: 2000a, Percorsi esplorativi di avvio al pensiero algebrico attraverso problemi; osservazione e rilevazione di difficoltà in insegnanti e allievi, *Atti del terzo Convegno Nazionale Intenuclei Scuola dell'obbligo*, Vico Equense, in stampa.
NAVARRA G.: 2000b, Una questione di stuzzicadenti, riflessioni sul linguaggio naturale e sul linguaggio algebrico, *Italiano & oltre*, in stampa.
NAVARRA G.: 2001, Progetto ArAl, La bilancia a piatti come metafora dell'equazione, Prima parte: l'attività con la bilancia, in attesa di pubblicazione.