Commenti dell'insegnante di classe
Commenti dell'E-tutor Giancarlo Navarra

1 dicembre 2009 1 *(uso del registratore)*

Premessa, obiettivi, contesto in cui si colloca il diario

Questa esercitazione è stata svolta con riferimento alle attività contenute in G. Navarra, A. Giacomin. *Unità 6: dalla bilancia a piatti all'equazione.* Pitagora Editrice Bologna.2003.
La classe interessata è una prima della suola secondaria di primo grado.
Prima di iniziare l'esercitazione è stata posizionata sulla cattedra una bilancia a piatti, fornita di alcuni pesi da 100g, 10g e 1g, ed alcuni oggetti opportunamente scelti e tarati (lattina di Coca Cola, bottiglietta di té, barattoli di marmellata e conserve alimentari, vuote o parzialmente colmati da acqua).

I: Oggi svolgeremo un'esercitazione[1] usando questi strumenti che ho posizionato sul tavolo, voi potete prendere appunti sul vostro quaderno di aritmetica.
Lorenzo: È scienze? Scriviamo sul quaderno di aritmetica e poi ricopiamo sul quaderno di scienze?
I: Questa esercitazione riguarda matematica? [2]... Riconoscete gli oggetti posizionati sul tavolo?
Cristian: C'è una bottiglia di Coca ed una bottiglia di pomodoro.
Francesco: Una bottiglia verde.
Marina: Una bilancia.
I: Di che tipo è la bilancia?
Sofia: Antica.
I: Ci sono alcuni oggetti ed una bilancia, analizziamo questa bilancia. È una bilancia che normalmente avete visto da qualche parte?
Alessia: Una bilancia antica.
Sofia: Una bilancia a pressione
Aura: Una bilancia a piatti.
Jessica: Una bilancia a due piatti.
Tariku: Una bilancia del tipo che usavano gli egizi[3].
Giorgia: Gli oggetti che ci sono hanno su delle lettere.
I: Soffermiamoci un attimo solo sulla bilancia. È una bilancia che normalmente vedete nei negozi?
Giorgia: Ah, della bilancia.
Più alunni: È una bilancia a piatti.
I: È a piatti, possiamo descrivere il funzionamento.

---

[1] *La lettura del diario evidenzia che l'attività è stata sviluppata proprio come un'esercitazione, e infatti la classe l'ha vista collegata a quella svolta in precedenza su peso e massa. Premetto quindi alcune considerazioni di carattere generale maturate dopo aver completato la lettura del diario. Mi sembra che lei abbia utilizzato la bilancia a piatti in termini tradizionali, e non trovo riferimenti riconoscibili all'Unità 6 della Collana, e quindi all'impianto teorico e metodologico del progetto ArAl. Non mi riferisco tanto al progetto in sé, come oggetto 'chiuso', con le sue peculiarità, quanto agli obiettivi che esso persegue legati alla prospettiva – sempre più diffusa in ambito internazionale - di costruire nella classe un ambiente adatto alla progressiva costruzione del pensiero pre-algebrico. Un primo suggerimento è quindi di leggere il primo fascicolo sul Quadro teorico e il Glossario e di ri-leggere l'Unità 6, perché ora non capisco bene a quale impostazione lei faccia riferimento. In questa cornice, anche il termine che lei usa 'esercitazione' denota un carattere temporalmente definito, con una connotazione di 'addestramento' molto lontano dalla filosofia dell'Unità. Riporto un estratto dal paragrafo 7 dell'Unità:*
'Il nostro obiettivo, che dai risultati raccolti in questi anni appare plausibilmente raggiungibile, è quello di verificare come nella soluzione di problemi verbali algebrici *un particolare utilizzo della bilancia a piatti, integrato con un opportuno uso della rappresentazione, possa costituire un approccio favorevole allo sviluppo di schemi pre-algebrici* negli alunni e possa consentire di giungere all'elaborazione di *equazioni 'ibride'* nelle quali far coesistere – in una fase iniziale provvisoria - *linguaggio naturale, linguaggio iconico* e *operatori formali matematici.* L'itinerario si organizza, attraverso la soluzione di opportune sequenze di problemi con la bilancia vera prima, e verbali poi, attorno alla *costruzione collettiva del concetto di equazione lineare* visto come punto di arrivo di un percorso centrato su *schematizzazioni successive di rappresentazioni* di situazioni proposte inizialmente con la bilancia a piatti.'
Mi sembra che questa impostazione nel suo lavoro manchi. A questo aspetto se ne collegano altri, che evidenzierò attraverso i Commenti, man mano che ne avrò l'occasione.
[2] *Ho già notato anche per altre esercitazioni di aritmetica che gli alunni tendono ad associare esercitazione con esperimento di scienze. V. Commento precedente.*
[3] *Pensando a mia nonna che la usava mi sento un geroglifico!*

Alex: È a peso.
Manuele: Che bisogna mettere un peso da una parte e poi vedere quanto pesa. Bisogna aggiungere pesetti sull'altro piatto che così diventano uguali.[4]
Cristian: Ma quella lì è una bilancia da commercio.
I: Una bilancia da commercio, non so che significa. Puoi spiegarmelo?
Più alunni: Per il commercio, per pesare i prodotti, tipo nei negozi ci sono le bilance per pesare i prodotti.
I: Ma io per esempio al supermercato non vedo questo tipo di bilancia.
Sofia: Gli egizi la usavano.
I: Ma il commercio cosa c'entra con gli egizi?
Sofia: Gli egizi commerciavano l'oro.
Francesco: Sì, l'oro!
I: Questo tipo di bilancia non c'è nei negozi dove vado in genere, commerciare in che senso?
Giorgia: Nel senso che la usavano gli egizi.
I: Associate questa bilancia al termine storico del commercio.
Giorgia: Nei negozi e nelle fiere ce n'è una simile ma non con due piatti, tipo con uno e una finestrella.
I: Con un display.
Giorgia: Sì, con un display ci assomiglia un pochino.
I: Cosa ha di particolare questa bilancia, se io metto un peso da una parte ed uno stesso peso dall'altra la bilancia si mette in…[5]
Manuele: … parità.
Lorenzo: In uguaglianza.
I: Il termine esatto è che la bilancia si pone in equilibrio, stiamo attenti che non osserveremo perfettamente questo stato di equilibrio ma possiamo considerare che sui piatti abbiamo lo stesso peso quando i piatti iniziano a muoversi lentamente, questo perché la bilancia è molto sensibile anche ai piccoli pesi, sappiamo che quando la bilancia si pone in equilibrio…
Alex: … è un'uguaglianza[6].
I: Un'uguaglianza cosa significa Lorenzo?
Lorenzo: Che sono uguali.
I: Cosa è uguale?
Più alunni: I pesi uguali.

---

[4] *Conveniva approfittare dell'intervento di Manuele per entrare nel vivo della situazione. La sua osservazione anticipa esattamente la domanda dell'insegnante qualche intervento più tardi.*
[5] *Due considerazioni. La prima è di carattere locale, e si collega al Commento 4: la domanda dell'insegnante riprende – come ho detto - l'osservazione precedente di Manuele, tant'è vero che è lo stesso alunno che completa immediatamente la frase. Poter cogliere a tavolino questa relazione fra i due interventi distanti fra loro è un esempio della potenziale significatività della metodologia dei diari pluricommentati: essa vuole proprio favorire - attraverso la lettura a posteriori di micro-situazioni di classe come questa, che hanno portato l'insegnante ad altrettante micro-decisioni - l'affinamento della sua sensibilità nel cogliere sfumature, incoerenze, misconcetti, suggerimenti nelle argomentazioni degli alunni (naturalmente è necessario che le argomentazioni siano realmente tali) e suoi eventuali errori, ritardi, fraintendimenti, occasioni perdute, sensibilità, competenza nell'interagire con essi, in modo da migliorare il suo insegnamento.*
La seconda considerazione è di carattere più generale e riguarda la conduzione dell'attività. Lei spesso formula una questione esprimendo una lunga frase e lasciando alla classe solo il compito di aggiungere l'ultima parola. Suggerisco di costruire un contratto didattico che modifichi radicalmente questa situazione. *La sua strategia (molto frequente negli insegnanti) crea una dipendenza eccessiva sul piano cognitivo e non favorisce l'argomentazione o la costruzione collettiva delle conoscenze. Gli alunni dovrebbero potersi esprimere il più possibile* individualmente *decidendo, in autonomia, l'organizzazione di ciò che desiderano dire e ascoltandosi reciprocamente (il tutto, ovviamente, entro i limiti consentiti dall'età). La strategia del 'completamento della frase' non favorisce, oltretutto, la 'relazione fra pari', aspetto quest'ultimo che lei stesso rileva nell'ultimo commento di questo diario.*
[6] *V. Commento 5, seconda considerazione. Inoltre: la frase di Alex, completandola, risulterebbe essere: 'Quando la bilancia si pone in equilibrio è un'uguaglianza'. C'è un'idea, ma la frase in sé non significa molto. Va chiesto allo stesso alunno di riformularla. Bisogna rimanere il più possibile coerenti con il contratto didattico in merito alla struttura delle argomentazioni. A questo proposito, invito anche a non accontentarsi delle risposte* corali, *soprattutto se sono approssimative, perché sono opache rispetto a quelle che sono le reali dinamiche cognitive del gruppo. Gratificano gli insegnanti perché sembra che tutti gli alunni (o una parte consistente di loro) abbiano capito, ma in realtà sono poco significative. Sono molto consuete nella normale attività didattica, ma bisognerebbe cercare il più possibile di ridurle.*

I: I pesi sui due piatti sono uguali.[7]
Sofia: Metti il peso massimo e poi metti quelli piccolini per vedere quanto misura.
I: Io ho preparato alcuni oggetti da pesare, usiamo quelli, che dite?
Giorgia: È necessario che abbiano la stessa… cioè lo stesso volume, possono anche avere volume diverso ma un peso anche uguale[8]
I: Questa è la differenza tra massa e volume che abbiamo studiato in scienze.
Maddalena: Tipo: se un oggetto è di metallo o di paglia ha volume diverso.
I: La differenza tra massa è volume che è attinente agli oggetti che stiamo osservando, ma io oggi vi avevo anticipato che non volevo fare un'esercitazione di scienze ma di…
Più alunni: … matematica.[9]
I: Vediamo questa cosa che stiamo sperimentando. Cosa c'entra con la matematica?
Più alunni: Le misure.[10]
I: La bilancia è in equilibrio… i due pesi sono…
Più alunni: … uguali[11].
I: Vi ricordate che vi ho detto che l'uguale ha significati diversi in matematica, per esempio il termine congruente in geometria. Vediamo qual è il significato di 'uguale' in questa esperienza. Per esempio se metto quest'oggetto che ho chiamato a sul primo piatto insieme a quello che ho chiamato b e sull'altro piatto quello che ho chiamato c insieme a quello che ho chiamato d cosa succede? La bilancia non va in equilibrio?

$$\boxed{a+b=c+d}$$

Francesco: No, non va in equilibrio.
Aura: Si è rotta.
Giorgia: Va di più dall'altra.
I: Sì, sappiamo che per la sensibilità della bilancia non osserveremo un equilibrio perfetto ma questo lento movimento dei piatti possiamo considerarlo equilibrio. Se metto su un piccolo peso (pezzetto di carta) abbiamo l'equilibrio. Su due piatti della bilancia ci sono gli stessi pesi. Possiamo scriverla questa cosa?
Nicholas: ab e cd hanno quasi la massa uguale.
I: a più…

---

[7] *La breve sequenza che comincia con Alex è una variante di quanto ho scritto nei Commenti 5 e 6.* Non è produttivo, come in questo caso, che sia l'insegnante a collegare in una sintesi pur provvisoria piccoli interventi frammentari separati fra loro. *In generale, le grandi difficoltà per l'insegnante dovrebbero essere quelle legate alla promozione dell'autonomia argomentativa degli alunni (spesso restii a gestirla, soprattutto se non sono abituati a farlo sin dalla scuola primaria), al cogliere i momenti chiave della discussione collettiva, al riproporli alla classe, al farli parafrasare agli alunni, nella ricerca di (almeno) un embrione di sintesi concettuale autenticamente* condivisa, *non necessariamente definitiva, migliorabile nel corso del tempo.*

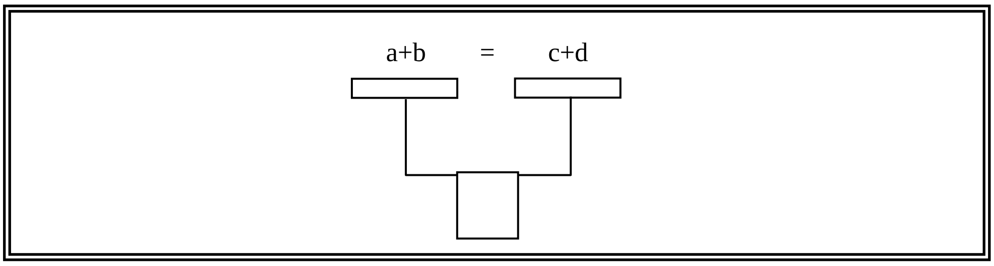
[8] *L'alunna si riferisce alla definizione di massa e volume da poco svolta in scienze. Sarebbe opportuno uscire dall'ambiguità matematica-scienze, che invece permane ancora, anche se in modo sotterraneo. Nell'Unità 6 chiariamo questo aspetto nel Commento 1, pag.15:*
'Lo scopo … è di avvicinare gli alunni all'equilibrio come aspetto centrale dell' attività: <u>da questo momento la bilancia è da considerare in equilibrio indipendentemente dal fatto che i piatti siano davvero allineati</u>. … Le bilance a piatti scolastiche, piuttosto instabili, in genere non sono di grande aiuto in questo senso. Conviene quindi adottare degli stratagemmi che distolgano l'attenzione della classe dagli indicatori (in genere lancette) di un equilibrio che non solo viene raggiunto a fatica in sede sperimentale ma che non rappresenta nemmeno, in questa attività, un obiettivo didattico. Per esempio, si può concordare con la classe di bloccare i piatti per evitare la loro oscillazione. <u>Il contratto didattico deve essere chiaro: l'equilibrio è una costante, indipendentemente dal suo raggiungimento concreto</u>.

[9] *V. Commento 5, seconda considerazione.*

[10] *Dovrebbe vigere un contratto didattico condiviso che le risposte monosillabiche o quasi sono inaccettabili. Non aiutano l'insegnante a capire realmente il livello di comprensione dell'argomento e non aiutano nemmeno i compagni. Probabilmente sarebbe stato meglio chiedere all'alunno cosa intendesse dire. In termini generali, va sottolineata l'opportunità (per la loro potenziale efficacia) di domande di chiarimento su affermazioni (relative a scoperte, intuizioni, ipotesi, ecc) fatte da un alunno. Un'ultima considerazione: risposte di questo tipo fanno capire come per gli alunni l'unico referente sia l'insegnante, generalmente molto esigente sulla conoscenza dei contenuti (definizioni, calcoli, formule, ecc) molto tollerante invece verso gli interventi nel corso di attività collettive, nelle quali il raggiungimento dell'obiettivo è dominante rispetto alla qualità delle argomentazioni. Un insegnante dovrebbe essere consapevole che* il controllo del linguaggio naturale e la realizzazione di pratiche sociali condivise è il fondamento per la comprensione del linguaggio matematico, e quindi dei concetti matematici.

[11] *V. Commento 5, seconda considerazione.*

Giorgia: a+b sono, anzi hanno la massa[12] quasi uguale a d e c.
I: Posso scrivere così a+b=c+d.
Giorgia: No, perché non sono proprio uguali.
I: Considerando una sensibilità dello strumento più bassa possiamo considerarli uguali[13] Cosa ho scritto alla lavagna?
Più alunni: a+b=c+d.
Jessica: Possiamo fare un disegno[14]
I: Potete fare un disegno naturalmente. Per esempio rappresentare quello che abbiamo scritto così[15]:



I: Cosa indica secondo voi questa uguaglianza?
Maddalena: Però secondo me non è proprio giusto giusto.
I: Perché?
Maddalena: Perché sembra che le due cose siano uguali uguali mentre in realtà non lo sono. Sembra che a sia uguale a c e b sia uguale a d.
I: Perché non sono uguali secondo te? La lattina di Coca Cola ha lo stesso peso della bottiglietta di té, ma non è questo che ho scritto.
Maddalena: Ma allora bisognerebbe specificarlo secondo me[16].
I: Ma io ho scritto questo, cioè: il peso dell'oggetto a più il peso dell'oggetto b è uguale al peso dell'oggetto c più il peso dell'oggetto d, è giusto?
Maddalena: Sì, è vero.
I: Come ho rappresentato l'equilibrio della bilancia in questa scrittura? Quale simbolo ho usato per esprimere l'equilibrio?

---

[12] *Continuano le interferenze fra l'esperienza di scienze e questa. Distolgono gli alunni dal senso di questa attività.*

[13] *Significato molto difficile da acquisire per gli alunni. Non è questo l'aspetto difficile. Manca la chiarezza del contratto didattico. Bisogna che insegnante e alunni* negozino *i termini della questione, fino alla completa* condivisione *che l'equilibrio reale non va ricercato. L'ambiguità funziona da distrattore.*

[14] *Non avevo previsto l'esecuzione di disegni. Non capisco bene questa precisazione. Ricorrere a più rappresentazioni - iconica, grafica, sagittale, tabulare, matematica, in linguaggio naturale, mista, ibrida, sporca, eccetera – per favorire la costruzione di significati è normale nella didattica. E molto spesso l'intuizione e l'esperienza dell'insegnante lo portano proprio ad introdurre più rappresentazioni in sequenza, anche improvvisandole, quando ravvisi la loro utilità per analizzare un oggetto matematico o un problema da più punti di vista. In questo caso specifico, poi, il ricorso alla rappresentazione costituisce uno dei nodi metodologici dell'attività. Riporto ancora dall'Unità (Commento 14):*
'La rappresentazione costituisce il passaggio determinante dalla bilancia all'equazione e favorisce l'approccio al pensiero algebrico. Ha l'obiettivo di portare gli alunni (che, di fronte ad un problema, per abitudine, tendono a cercare le operazioni e il relativo risultato) ad individuare gli aspetti relazionali interni al problema stesso, rimandando ad un momento successivo *la ricerca del risultato'.*

[15] *Non è l'insegnante che propone il suo disegno. Sono gli alunni che propongono le loro rappresentazioni, e l'insegnante dovrà poi mediare la discussione che nascerà attorno al loro confronto. Nell'Unità scriviamo:*
'Si passa alla rappresentazione sul quaderno delle esperienze svolte. Si comincia con l' invitare la classe a proporre un disegno della bilancia e degli oggetti che compaiono nei piatti (pesi conosciuti e sconosciuti). Ogni alunno elabora il suo disegno che poi viene riportato alla lavagna. Compaiono rappresentazioni molto diverse che riflettono due atteggiamenti opposti variamente intersecati:
(a) descrittivo
(b) interpretativo.
I disegni del tipo (a) sono realistici, dettagliati, ricchi di particolari spesso sovrabbondanti, hanno l'obiettivo di 'far vedere' chiaramente gli oggetti usati nelle esperienze (la bilancia, i sacchetti, le scatolette e così via). Il punto di vista è quello della concretezza. I disegni del tipo (b) sono schematici, più semplici dei precedenti, eliminano il superfluo; gli oggetti sono rappresentati con simboli (rettangoli, quadrati, lettere). Esprimono una tendenza all'astrazione.
I disegni vengono posti a confronto e si apre la discussione su di essi, con l'obiettivo di giungere ad una rappresentazione condivisa.'

[16] *Sarebbe stato opportuno chiedere a Maddalena di chiarire il suo pensiero.*

Manuele: I grammi.
I: Per rappresentare l'equilibrio ho usato i grammi?
Più alunni: No, l'equilibrio equi[17]…
I: Per l'equilibrio quale simbolo ho inserito?
Più alunni: L'uguale.
I: Il simbolo che abbiamo chiamato uguale. Adesso mettiamo su un piatto due oggetti che io ho chiamato…
Più alunni: a e c[18]
Sofia: Io non ho capito molto bene.
I: Scrivo io alla lavagna e voi riportate sul quaderno come scriviamo.
Più alunni: a più c uguale…
I: Vediamo quanti pesetti devo mettere sull'altro piatto per uguagliare il peso a+c= 100[19].
Più alunni: 100g+100g.
Manuele: 200.
I: Non scriviamo 200, ma 100+100+[20] alla fine facciamo i calcoli, aggiungiamo un 10.
Alex: Ma prof, metti qualcosa di più pesante.
I: Metto adesso un altro 10 e vediamo cosa succede[21]. Voi non scrivete… la bilancia ha cambiato equilibrio. È squilibrata dalla parte opposta, il 10 non va bene, lo togliamo[22].
Più alunni: Metti un 5.
I: Abbiamo solo pesi da 1g. Aggiungo 1, cosa avete scritto finora?
Più alunni: 100+ 100+10+1.
I: Altro 1+1.[23]
Nicholas: Ma sono microbi[24]
Francesco: Quanti uno ci hai messo!
I: Tre, e con questo quattro. La bilancia è in equilibrio[25]. Allora cosa abbiamo scritto?
Più alunni: 100+100+10+1+1+1+1.
I: Cioè a più c è uguale a…
Sofia: … 214.
Si scrive alla lavagna

a+c=100+100+10+1+1+1+1
a+c=214

Alex: Non 224. Lo ha tolto quello da dieci?
Sara: Prima ha messo un dieci e poi lo ha tolto.
Giorgia: No, ha tolto uno da 10.
Sofia: Ha messo il 10, ha visto che era troppo, lo ha tirato via ed ha messo quelli da 1.
I: Se volevo far comparire nella scrittura che toglievo qualcosa cosa scrivevo?
Più alunni: Il meno[26].

---

[17] *Non capisco se sia un errore di battitura.*
[18] *Ogni oggetto che ho preparato ha una lettera di riconoscimento. Agli alunni è chiaro cosa significa la lettera? È semplicemente un contrassegno o indica il peso sconosciuto, cioè un numero? Cioè: la lettera ha un significato matematico? Penso che le lettere nelle vostre equazioni indichino il peso, perché altrimenti l'uguale cosa indicherebbe? Sto pensando al 'retropensiero' degli alunni che non hanno elaborato l'approccio alla lettera, ma se la sono vista presentare dall'insegnante, e mi sto chiedendo cosa significhino per loro davvero a, b, c e d (la domanda è retorica perché in realtà le nostre esperienze come ricercatori e la letteratura parlano diffusamente di tale questione interpretativa (le consiglio in particolare la lettura del termine 'Lettera' nel Glossario).*
[19] *Allora a e c indicano i pesi. Ma, essendo lettere diverse, indicano anche pesi diversi? Se sono due incognite, come fanno a stabilire gli alunni il loro valore con un'unica equazione? Comunque mi sembra di capire, da come continua l'attività, che a+c=100 sia squilibrata dalla parte di a+c e che bisogni aggiungere all'unico peso 100 altri pesi fino a che si ristabilisce l'equilibrio.*
[20] *Se non interpreto male, l'insegnante ha inserito un '+' alla fine perché sa che dovrà aggiungere altri pesi. Gli alunni come interpretano il '+'? senza nulla alla sua destra? Loro non sanno ancora come continua l'attività.*
[21] *Penso che l'attività dovrebbe essere condotta in prima persona dagli alunni, compresi i tentativi, gli errori, le successive approssimazioni. L'insegnante dovrebbe essere in questo momento un osservatore, e porre questioni che stimolino l'argomentazione.*
[22] *L'insegnante continua ad essere troppo presente.*
[23] *Idem.*
[24] *Riferendosi ai pesi da un grammo che sono molto piccoli.*
[25] *Perché non si lascia che siano gli alunni a dirlo?*

I: In questo caso non abbiamo usato la sottrazione perché abbiamo solamente aggiunto… Possiamo ricavare il peso di uno dei due oggetti dei quali non conosciamo il peso?[27]
Sofia : Sì, basta che tiri via tutti i pesetti, tiri via uno degli oggetti e metti i pesi giusti.
I: Cioè devo pesare un singolo oggetto.
Giorgia: ac è circa uguale a 214[28]. Provi ad aggiungere pesetti e vedere quelli che sta meglio e scopri cosi i pesetti giusti per formare ogni oggetto.
I: Forse non mi sono spiegato bene. Con questa uguaglianza riesco a ricavare il singolo peso di a e di c?[29]
Giorgia: No.
Sofia: È circa la metà.
I: Non è detto che gli oggetti hanno lo stesso peso.[30] Uno è un barattolo di vetro e l'altro una lattina di Coca Cola… Non si può ricavare il peso di ogni singolo oggetto da quella uguaglianza. Non si può perché non abbiamo abbastanza informazioni[31]. Facciamo un'altra esperienza e vediamo cosa succede. Tolgo a da un piatto della bilancia ed aggiungo pesi sullo stesso piatto fino all'equilibrio, ho aggiunto 20+4. La bilancia è in equilibrio.
Marina: 24.
L'insegnante scrive alla lavagna:

24+c=214

Marina: a è uguale a 24.
I: Posso adesso ricavare c?
Più alunni: Sì… No…
Sara: Puoi ricavare a[32].
Giorgia: Ma anche c.
Jessica: 214 meno 24.
I: Posso ricavare c spostando il 24 davanti al 214 e fare cosa?[33]
Più alunni: Sottrarre.
I: Cioè ho cambiato operazione. *Scrive:*

24+c=214

---

[26] *La risposta è troppo povera. È solo il completamento di una frase. Saper costruire argomentazioni complete, coerenti, linguisticamente significative è una competenza richiesta ormai in molti ambienti istituzionali (dai programmi nazionali, alle prove SSIS, a numerosi progetti speciali sull'educazione matematica). Riporto per esempio dal progetto inglese 'The National Numeracy Strategy':* Chiedete agli alunni di fornire delle risposte costituite da più di una singola parola o di un singolo numero. Per esempio, talvolta potreste richiedere che la risposta a domande brevi come: 'Quanto fa 16 più 8?' sia espressa con la frase completa: 'Sedici più otto è uguale a ventiquattro'. Potreste inoltre invitare gli alunni alla lavagna e portarli a scrivere in forma simbolica: 16+8=24'.
[27] *Con questa domanda io intendevo spingere gli alunni a riflettere se potevano trovare il valore delle due incognite.*
[28] *Perché 'circa'? È ancora presente l'idea di 'equilibrio imperfetto'?*
[29] *Ritengo che sia una domanda troppo difficile per la classe. Non so quale sia il controllo degli alunni sul significato delle lettere in matematica. Per un alunno giovane intuirlo è tutt'altra cosa rispetto alla manipolazione dei simboli.*
[30] *L'insegnante rilancia raramente la palla agli alunni con domande del tipo (a Giorgia): 'Puoi spiegarci perché dici no? No perché?' E a Sofia: 'Perché circa la metà? In base a che cosa usi il termine 'circa'? Io, e credo anche molti dei tuoi compagni, non capiamo cosa vuoi dire. Ce lo spieghi?' E poi: penso che il 'Non è detto' valga per l'insegnante, ma che significato attribuiscono gli alunni a queste parole? In che senso 'non è detto'? Non dimentichiamo che la prima proposta degli alunni era basata proprio sulla supposta uguaglianza dei pesi (100g+100g).*
[31] *L'insegnante tende a sovrapporsi agli alunni e a proporre conclusioni parziali come se dovessero essere sempre condivise da una classe che ne coglie il significato. Ma spesso non è così.*
[32] *Sara è fra coloro che non capiscono. Bisognerebbe abituarsi a chiedere il più spesso possibile agli alunni le* ragioni delle loro proposte. *Lo so che non sempre è semplice, o conveniente, ma la direzione dovrebbe essere quella. Cito a questo proposito un articolo di un ricercatore americano, Booth (1986), in cui afferma:* 'Gli errori e le misconcezioni degli allievi spesso non sono né prese a cuor leggero né stupide, ma rappresentano il risultato di riflessioni e di tentativi ragionevoli per dare un senso ad espressioni matematiche altrimenti prove di significato'.
[33] *Lo spostamento da una parte all'altra dell'uguale presuppone che la classe abbia conquistato il primo principio di equivalenza, ma attività in questo senso con la bilancia non le avete condotte. È un tipico caso in cui l'insegnante crede che lui e gli alunni pensino alla stessa cosa ma non è così: lui ha in mente la 'legge del trasporto' (area algebrica) e gli alunni hanno intuito 'che si fa una sottrazione' (area aritmetica).*

c=214-24

Giorgia: Ma io prof non ho capito una cosa: ma perché ha scritto c+24? Non sono la stessa cosa?
Lorenzo: Ha scritto così perché 24 è l'altro[34].
Giorgia: Ah, sì sì.[35]
I: Quanto pesa c?
Francesco: 190.
I: Alcune volte queste uguaglianze mi danno la possibilità di ricavare informazioni sui singoli oggetti dei quali non conosco il peso, altre volte come nella prima no. Abbiamo trasformato questa attività della bilancia a piatti in una scrittura matematica, un'uguaglianza… in queste uguaglianze quali operazioni abbiamo usato?
Più alunni: L'addizione e la sottrazione.
I: Scritture che contengono cosa le… ? *(indico alla lavagna)*
Più alunni: Le lettere che i numeri[36]
I: Il risultato di un'uguaglianza può essere anche un'operazione, l'abbiamo visto anche nelle proprietà delle operazioni, cioè un'operazione è uguale ad un'altra operazione, non sempre dopo l'uguale c'è un numero, giusto?[37]
Più alunni: Sì.
I: Adesso tolgo tutto dai piatti e metto questi due oggetti uguali (due lattine di Coca Cola una contrassegnata con la lettera a).
Giorgia: Scriviamo a a.
I: Cosa scrivo alla lavagna?
Più alunni: a+a.
Tariku: Uguale.
I: Aggiungo pesi sull'atro piatto 10+10… fino a 48g, cioè a+a=48[38]. Posso ricavare a? *Scrive:*

a+a=48

Più alunni: Sì, fai la metà.[39]
Sara: Fa 24[40].
I: Cioè quale operazione?
Più alunni: Diviso…. la divisione!
I: 48 diviso 2. Perché 2?
Tariku: Perché gli oggetti uguali sono due.

---

[34] *Gli alunni nel loro linguaggio si capiscono subito. Che gli alunni si capiscano 'nel loro linguaggio' sono convinto, ma solo se esistono premesse metodologiche che favoriscano l'elaborazione autonoma di congetture, l'abitudine a costruire argomentazioni il più possibile complete, la pratica condivisa dell'ascolto reciproco, l'utilizzo di un 'lessico matematico'. Ma se queste condizioni sono assenti, qual è 'il loro linguaggio'? La frase di Lorenzo, detta così, è praticamente incomprensibile: 24 è l'altro* cosa? *Se il linguaggio è povero, veicola ben pochi significati.*
[35] *Chi ci dice che, con la sua risposta così criptica, Giorgia abbia davvero capito, o che, piuttosto, non sia sgusciata da una situazione che in realtà non comprende? Naturalmente, non conoscendo Giorgia, potrei sbagliarmi.*
[36] *Non comprendo il senso di questa frase.*
[37] *La spiegazione è fornita dall'insegnante e rimane esterna agli alunni, che non possono fare altro che accettarla. In questo senso, la domanda 'giusto?' non dà alcuna garanzia in relazione alla reale comprensione da parte della classe, nonostante la risposta corale affermativa.*
[38] *Anche il non scrivere più la marca deve essere negoziato con la classe. L'esperienza mostra che inizialmente gli alunni tendono a scriverla; col tempo capiscono che non è necessario inserirla nell'equazione ma solo indicarla nella risposta. Questo significa che hanno cominciato a capire, almeno in embrione, e spesso in modo ancora instabile, che la struttura dell'equazione rimane la stessa, indipendentemente che si tratti di milligrammi o di tonnellate. Anche queste conquiste vanno realizzate attraverso la negoziazione dei significati, e non attraverso una 'imposizione' di significati da parte dell'insegnante.*
[39] *Risposte così povere dovrebbero comportare sempre una richiesta di chiarimento da parte dell'insegnante. 'Fai la metà' di cosa?'*
[40] *Il 'Fa 24', seguito dalla domanda dell'insegnante 'Quale operazione?' lascia comprendere che non si sono affrontati temi e dualità nodali come* aspetti procedurali/relazionali, processo/prodotto. *In questo caso i piani algebrico e aritmetico si sovrappongono: l'uguale è (probabilmente solo per alcuni) un uguale* relazionale *(2a e 48 sono equivalenti), e questo è un punto di vista* algebrico. *'Fai la metà', 'Fa 24' conducono invece ad un uguale come* operatore direzionale, *quindi con una valenza* procedurale, *e questo è un punto di vista* aritmetico. *È proprio sulla riflessione assieme alla classe su questi aspetti che si costruiscono le basi per un approccio significativo all'algebra anche in un contesto aritmetico.*

Sofia: Fare subito 48 diviso 2 perché i pesi sono uguali.
I: Sono due uguali 2a[41]… l'uguale nelle operazioni può essere considerato come cosa?

2a=48

Giorgia: Uguale nelle operazioni.
I: Uguale come l'ho considerato?
Giorgia: Come questo è uguale a questo.
I: L'uguale l'abbiamo considerato come una bilancia in equilibrio dove le operazioni sono i piatti della bilancia.
Alex: I piatti si eguagliano.
I: I due piatti sono in equilibrio… prendete il libro a pagina 5.
Sofia: Ma non facciamo 48 diviso 2?
I: 48 diviso 2 quanto fa?
Più alunni: 24.
I: a=24 grammi[42]. Va bene.

a=48:2 a=24

Manuele: A che pagina del libro?
I: Pagina 5... come si chiama l'argomento?
Elia: Le equazioni.
I: Scriviamo sul quaderno come titolo 'Le equazioni'.
Alessia: Lo scriviamo sotto?
I: Sì, sotto va bene.
Lorenzo: Ma io non ci sto.
I: Scrivi sulla pagina nuova… leggiamo le definizioni evidenziate in giallo.
Giorgia: Posso leggere?
I: Leggi Giorgia.
Giorgia: 'Le lettere in matematica possono sostituire i numeri'.
I: Nella nostra esercitazione abbiamo evidenziato questa cosa?
Alex: Sì, abbiamo chiamato degli oggetti con delle lettere.[43]
I: Questa bilancia possiamo chiamarla in questo modo?
Più alunni: Sì… equazione.
I: L'equazione è come una bilancia, non sempre si mettono dei numeri… alcune volte dei numeri alcune volte delle operazioni ed alcune volte delle…
Più alunni: … lettere!
I: Le lettere hanno un significato che il vostro libro chiama…
Aura: …incognita!
I: E cosa sarebbe questa incognita?
Sara: Qualcosa che sostituisce un numero.
Aura: Che si usa per semplificare.

---

[41] *L'insegnante è sicuro che gli alunni sono consapevoli del passaggio dalla rappresentazione additiva a+a a quella moltiplicativa 2a? In base alle nostre esperienze(e non solo nostre) la capacità di interpretare e di produrre parafrasi di questo tipo è una conquista che richiede tempo e strategie adeguate per costruire un passaggio dall'esperienza all'astrazione che sia davvero* portatore di senso.
[42] *Come prima, l'insegnante dice a=24 grammi e scrive a=24. Sono cose diverse. La marca c'è o no? Gli alunni sanno perché l'insegnante l'ha detta ma non l'ha scritta? O piuttosto 'va bene comunque' perché l'ha detto l'insegnante? Queste sono sfumature tutt'altro che marginali.*
[43] *Attenzione che Alex sta dicendo una cosa radicalmente diversa quella che ha letto Giorgia. Mi rifaccio a quanto ho scritto nel Commento 18: 'Agli alunni è chiaro cosa significa la lettera? È semplicemente un contrassegno o indica il peso sconosciuto, cioè un numero?' Aggiungo: per loro la lettera 'è' ('sta per') un numero? Alex esprime chiaramente l'idea dei suoi compagni:* 'Abbiamo chiamato degli oggetti con delle lettere'. *Per loro, le lettere sulle scatole non sono numeri, ma 'nomi' di oggetti. E allora mi chiedo: a, b, c, d sulle scatole sono nomi di oggetti. Ma allora in a+c=214 cosa significano queste lettere? È chiaro che questo problema non li sfiora minimamente, però l'insegnante deve imparare a cogliere queste vere e proprie* fratture semantiche. *Penso che una lettura attenta dell'Unità sulla bilancia possa aiutarla molto in questo senso.*

I: Qui nell'ultima scrittura c'era una lettera. Abbiamo trovato il suo valore. Quella è l'incognita, c'era una lettera e dovevamo cercare il suo valore, se al posto di a scrivevo 24 allora 24+24 risulta 48… ho trovato il valore della lettera che non conoscevo nell'equazione, quello è il valore dell'incognita. *Scrive:*

a+a=48
24+24=48
a=24

L'esercitazione prosegue con lo svolgimento di esercizi sul libro.
.[44]

[44] *Ho notato durante l'ascolto della registrazione che in modo esagerato i ragazzini interagiscono solo con l'insegnante e difficilmente tra loro.*