

La geometria con il pop-up.
Una sperimentazione di geometria dinamica nella scuola dell'obbligo
Giancarlo Navarra - GREM di Modena

In this report we will describe the first phases of an experimental activity on the use of "pop-up paper engineering" as an instrument for promoting a dynamic switching from plan geometry to space geometry. The pupils learn to represent on the plan the cuts and the foldings which enable to obtain parallelepipeds and composed pop-up solids. Therefore they learn to "see" mentally the tridimensional object before building it.

These techinics are proposed to the classes with the aim of building pop-up objects and books considering their remarkable expressive potentialities. We will illustrate two itineraries: the first one has been developed with pupils aged 9 and the second one has been planned for students aged 11 to 14 who explore the pop-up solids by solving an opportunely programmed sequence of problems.

1. Tutti conoscono quel particolare tipo di libri, biglietti, giochi nei quali, all'apertura, le illustrazioni assumono un aspetto tridimensionale con effetti talvolta pirotecnici. Le tecniche che consentono di realizzarli rientrano in un universo noto come "pop-up paper engineering" (all'incirca "tecnica per far saltar su la carta") e sono numerose, a seconda che si vogliano ottenere movimenti di piani paralleli fra loro o meno, rotazioni di vario genere, slittamenti di piani uno sull'altro, eccetera.

Tali meccanismi consentono di raggiungere risultati sempre più complessi; ognuno di essi infatti è solo il punto di partenza per una serie infinita di possibilità espressive. Cominciando a lavorare con il pop-up si impara molto presto che gli errori nelle piegature o nei tagli si pagano subito, nel senso che l'oggetto che si ha in mente non risulta come si sarebbe voluto. Così, dopo i primi esperimenti per tentativi ed errori, si scopre quella che è la dote principale di un buon progettista pop-up: riuscire a prevedere tagli e piegature senza doverli eseguire. Ossia: saper disegnare tutte le linee sul foglio verificando la loro correttezza solo alla fine, perché anche una piegatura sbagliata (per non parlare di un taglio sbagliato) può compromettere irrimediabilmente tutto il lavoro. *Insomma: deve "vedere" mentalmente l'oggetto tridimensionale pur continuando a lavorare sul piano.* Si è formata così l'intuizione delle potenzialità didattiche del pop-up ed è sorta l'intenzione di esplorarle, per verificare se questo ambiente possa favorire, in generale, il passaggio dalla geometria del piano a quella dello spazio.

L'interesse che il pop-up può suscitare nell'insegnante di matematica è legato dunque al suo essere veicolo per una *geometria dinamica* attraverso una serie di progettazioni, realizzazioni, manipolazioni e concettualizzazioni che vanno opportunamente gestite.

Presenteremo ora la sperimentazione condotta in classi di scuola elementare (in particolare una quarta) e un'ipotesi di attività da condurre in classi di scuola media. Abbiamo avuto anche l'opportunità di realizzare l'esperienza con un gruppo di bambini di una scuola materna (che descriveremo in un altro articolo) e con insegnanti partecipanti a corsi di aggiornamento e di perfezionamento.

2. Ognuno dei meccanismi del pop-up può essere esaminato dal punto di vista dei principi geometrici che di volta in volta entrano in gioco. Quello di cui ci occuperemo ora consente di ottenere una molteplicità di *piani che, nel movimento, lavorano parallelamente rispetto a quelli dai quali sono stati ricavati*. I piani si possono ottenere per tagli e piegature e queste ultime, come nell'origami, possono essere "a colle" o "a valle". Si possono anche aggiungere dei nuovi piani incollandoli al foglio di base ma abbiamo tralasciato questa possibilità e ci siamo concentrati solamente sul risultato che si può ottenere tagliando e piegando un unico foglio.

I solidi pop-up con i quali abbiamo cominciato sono i parallelepipedi retti. Il più semplice da ottenere è il cubo e per questa ragione è stato l'unico con cui sinora abbiamo lavorato nella scuola elementare. Il meccanismo per costruire il cubo o il parallelepipedo è lo stesso però è più difficile, nel secondo caso, capire dove posizionare le linee della piegatura rispetto a quella che consente di piegare a metà il foglio. L'itinerario continua con la costruzione di solidi composti da parallelepipedi. È possibile anche progettare parallelepipedi non retti, ma non abbiamo ancora trasformato questa nostra esplorazione in un oggetto didattico da portare nelle classi.

Descriveremo ora l'attività condotta nella quarta elementare di Bribano (BL) in collaborazione con Cosetta Vedana, insegnante dell'area logico matematica. Lo scopo che abbiamo prefigurato alla classe è stato quello di costruire dei libri animati formati da insiemi di cartoncini rettangolari ritagliati e piegati ognuno dei quali avrebbe illustrato un episodio di una storia scelta e sceneggiata in precedenza (è evidente la potenziale valenza

interdisciplinare di tutto il lavoro) ma per fare tutto questo era necessario possedere il controllo di certe tecniche, e noi gliele avremmo insegnate¹.

La descrizione potrà essere accompagnata da note (*scritte in corsivo*) ricavate dal "diario di bordo".

Per far entrare in situazione gli alunni presentiamo un primo "oggetto dinamico" (fig.1): uno scatolone privato di due facce opposte; su una delle quattro rimaste è stata praticata un'apertura in modo che, aprendo la scatola, si ottenga un teatrino. È importante che gli alunni vedano che una scatola può essere usata sia con le aperture laterali che, rovesciandola, con le aperture sopra-sotto.

Successivamente ogni alunno progetta e poi costruisce un suo ambiente personalizzato ritagliando una scatola.

Mostriamo un altro teatro ricavato ancora da uno scatolone (fig.2). Questa volta, nell'aprirsi, il teatro rivela al suo interno un castello ricavato tagliando e piegando opportunamente il cartone. Ci sono i merli, il portone i cui battenti si aprono e una botola che si spalanca mediante dei fili.

Apriamo e chiudiamo molte volte lo scatolone per mettere in evidenza i movimenti della nostra "macchina".

Facciamo vedere un cartoncino dal quale abbiamo ricavato un "cubo pop-up" (fig.3) e spieghiamo che è il meccanismo mediante il quale abbiamo ottenuto il castello all'interno del teatro.

Anche in questo caso pieghiamo e ripieghiamo più volte il cartoncino e chiediamo di riprodurlo su un foglio.

• *Inseriamo un cubo di legno nel vuoto del cubo pop-up (di uguali dimensioni) e contiamo le facce, gli spigoli e i vertici visibili. Scopriamo così che il cubo pop-up in realtà è un solido "incompleto". La discussione attorno ai solidi costruiti dagli alunni (che spesso non sono dei cubi) porta a riconoscere uguaglianza, perpendicolarità e parallelismo fra le linee.*

Spieghiamo che bisogna imparare a progettare il cubo sul foglio bianco tenuto aperto. Diamo la simbologia da usare per illustrare tagli e piegature (fig.4).

• *Si evidenziano numerose difficoltà nel controllo dei concetti e nell'uso degli strumenti (righelli, goniometro). Continuiamo a lavorare su uguaglianza, perpendicolarità, parallelismo, angoli, angoli retti. Discutiamo sui dubbi, le confusioni, le incertezze espressi nel corso della discussione (es: la linea retta è "diritta" nel senso di "orizzontale" oppure "le linee sono perpendicolari quando si incrociano")*

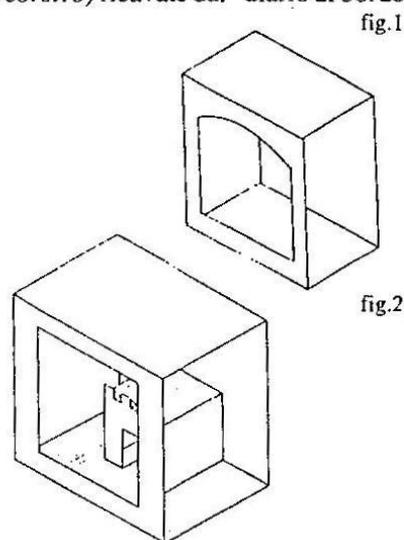


fig.1

fig.2

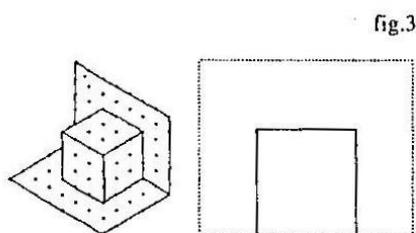


fig.3

Gli alunni lavorano su fogli piegati a metà

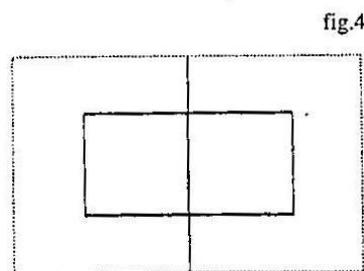


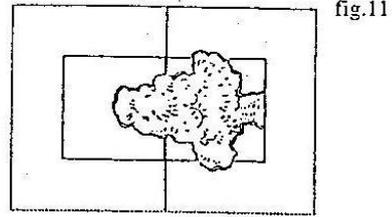
fig.4

— taglio; piegature: - - - valle, — colte

¹. Per facilitare l'interpretazione dei progetti dei solidi pop-up useremo delle assonometrie disegnate su carta isometrica che mostrano i risultati che si ottengono una volta effettuati tagli e piegature. Da un punto di vista didattico si può pensare a dei collegamenti fra l'attività con i solidi pop-up e quella illustrata da N. Malara in questi stessi atti.

Quest'ultimo, in particolare, permette di vedere come il cubo possa essere completamente trasformato con delle linee "libere" e fa intravedere come questa scoperta, con l'esperienza, spalanchi le strade alla fantasia.

• Bisogna imparare ad usare l'accorgimento di non interrompere il collegamento tra le facce del cubo ma di lasciare intatto almeno un tratto della piegatura "a colle" in modo da garantire la continuità fra le due superfici.



3. Passiamo ora ad illustrare un percorso adatto a classi di scuola media.

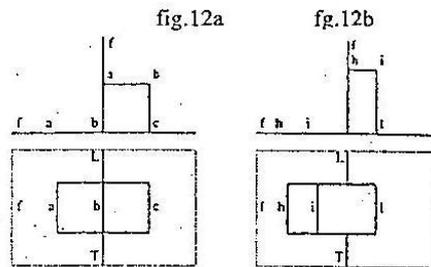
Immaginiamo di aver già svolto in classe le attività per costruire il cubo pop-up (più o meno simili a quelle che abbiamo appena descritto) e di essere sul punto di affrontare il parallelepipedo pop-up. Abbiamo già incontrato quello ottenibile semplicemente mediante un "allungamento del cubo", ma ora

ne costruiremo uno che si sviluppa perpendicolarmente alla piegatura principale del foglio. Le difficoltà sono due:

1) a foglio aperto, lo spigolo "a colle" 'i' (fig.12b) non coincide più - come accade per 'b' nel cubo (fig.12a) - con la piegatura principale del foglio, e bisogna quindi scoprire "dove cade";

2) analogamente, bisogna capire dove va posizionata la piegatura a valle 'l' (fig.12b) che si trova (come 'c' nel cubo) sotto la piegatura principale del foglio (che d'ora in poi chiameremo LT - Linea di Terra).

Didatticamente, questo parallelogramma è molto più complesso del precedente e quindi bisogna portare gli alunni a scoprirlo per gradi. Scegliamo di procedere mediante una didattica per problemi: proporremo delle situazioni da esplorare sperimentalmente (per esempio attraverso attività per piccoli gruppi) che consentano di giungere ad una serie graduale di conclusioni generali su alcuni aspetti del meccanismo che stiamo analizzando.



Cominciamo proponendo un progetto che facciamo interpretare e poi realizzare; esso servirà da base per le successive riflessioni (fig.13a).

Emerge con chiarezza il

Problema 1

"È possibile stabilire una relazione fra la posizione della piegatura "a colle" di un parallelepipedo rispetto a LT e la sua altezza?"

Soluzione

Fintantoché lo spigolo 'a' si trova sotto LT il parallelepipedo è più basso del cubo; se si trova sopra, è più alto.

È opportuno a questo punto proporre degli esercizi che permettano di consolidare gli aspetti concettuali del meccanismo ponendo consegne del tipo "Costruite un parallelepipedo alto e stretto"

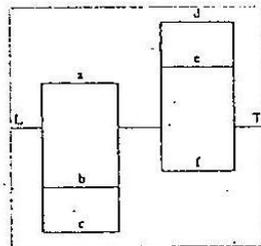


fig.13a

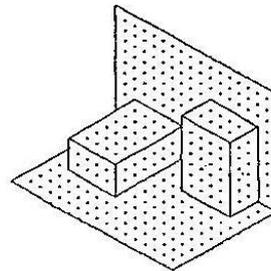


fig.13b

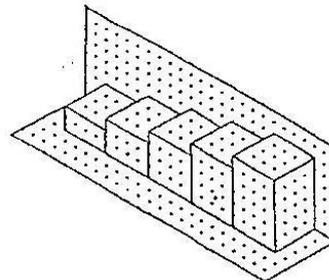
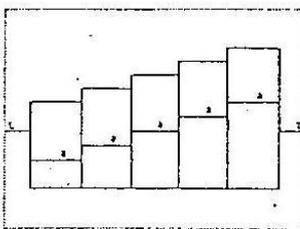


fig.14

oppure "grande e basso" che lascino lo spazio all'interpretazione ma obblighino a riflettere sulle relazioni fra la posizione degli spigoli rispetto alla linea di terra e il solido che si vuole ottenere.

In questa fase proponiamo dei progetti contenenti degli errori (un esempio nella fig.15) accompagnati dalla domanda "Cosa c'è di sbagliato?" Invitiamo il lettore ad analizzare il disegno e a cercare l'errore, anche perché è proprio da questa situazione che nasce il prossimo problema.

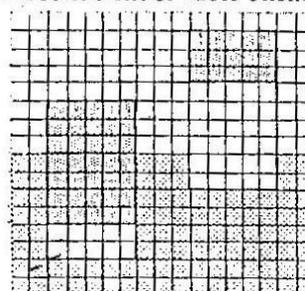


fig.15

• In questo disegno mostriamo come l'inserimento di zone diversamente colorate possa favorire la comprensione del progetto, consentendo di visualizzare con maggiore chiarezza la "profondità" dei piani perpendicolari.

Ecco dunque il

Problema 2

"È possibile realizzare un prisma pop-up a base trapezoidale?"

fig.16

Soluzione

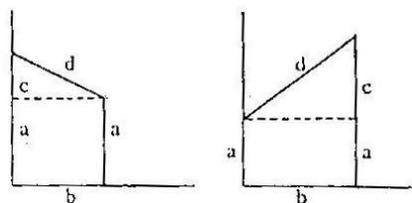
Per poter "chiudere" il pop-up dovrebbe essere:

$$a + c + b = a + d$$

$$c + b = d$$

ma questo è impossibile (fig.16).

Si conclude quindi che: si possono costruire tutti i prismi pop-up tranne quelli aventi per base un trapezio non parallelogramma.



Ricordiamo che il nostro scopo finale è di costruire dei libri pop-up. Bisogna quindi che le parti mobili siano progettate in modo opportuno. Questa esigenza genera un nuovo problema.

Problema 3

"A quali condizioni un solido pop-up non esce dal bordo quando si piega completamente il relativo foglio a metà?"

fig.17

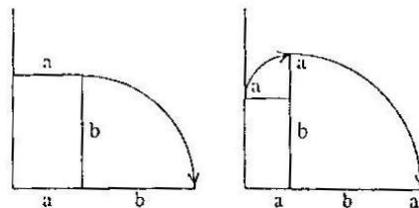
Soluzione

Si scopre sperimentalmente che ci sono due casi distinti, a seconda che venga ritagliata o meno anche una parte della faccia superiore del parallelepipedo (fig.17).

Vi sono quindi due conclusioni; che il mezzo foglio sia come minimo uguale:

- 1) alla somma delle dimensioni a e b del parallelepipedo;
- 2) alla somma di b e del doppio di a.

La prima soluzione riguarda tutti i rettangoli isoperimetrici il cui semiperimetro sia uguale alla lunghezza di mezzo foglio.



Sinora abbiamo esaminato i parallelepipedi e la possibilità di utilizzare, mediante tagli, anche la loro faccia superiore.

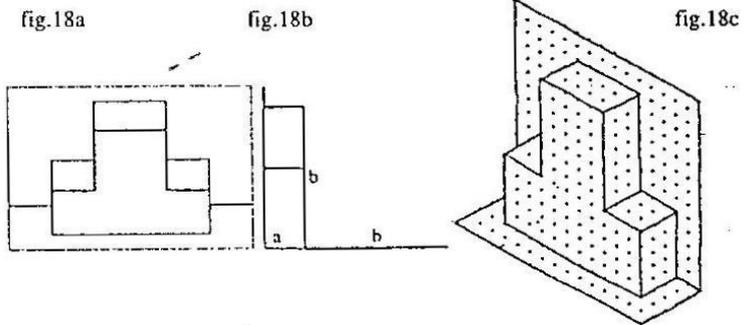
L'obiettivo di ampliare la conoscenza delle potenzialità espressive del meccanismo che stiamo analizzando ci conduce ora a prendere in esame alcuni solidi composti ottenibili mediante la sovrapposizione di parallelepipedi. Ne possiamo esaminare di due tipi diversi, e questo porta all'individuazione di due differenti problemi:

Problema 4 (primo tipo):

“Come si calcolano le dimensioni del solido se tutti i parallelepipedi hanno la stessa profondità?” (fig.18a)

Soluzione

Si ha ancora che la somma delle dimensioni a e b deve essere minore o uguale a mezzo foglio (fig.18b).



Problema 5 (secondo tipo):

“Come si calcolano le dimensioni del solido se i parallelepipedi non hanno la stessa profondità?” (fig.19a)

Soluzione

Si trova che:

$$a_1 + b_1 - (a_1 - a_2) + b_2 - (a_2 - a_3) + b_3^2 f/2$$

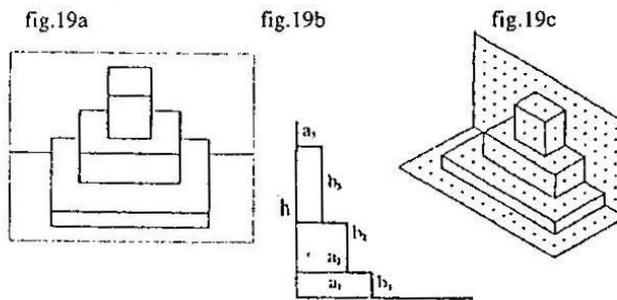
$$a_1 + b_1 - a_1 + a_2 + b_2 - a_2 + a_3 + b_3^2 f/2$$

$$b_1 + b_2 + a_3 + b_3^2 f/2$$

$$(b_1 + b_2 + b_3) + a_3^2 f/2$$

$$h + a_3^2 f/2$$

In generale: la somma fra la somma h delle altezze e la profondità del parallelepipedo più in alto deve essere minore o uguale a mezzo foglio (fig.19b).



4. In conclusione, sintetizziamo alcune riflessioni di carattere generale sulle esperienze condotte sinora nelle classi e con gli adulti.

- L'attività è certamente molto suggestiva e coinvolge notevolmente chi vi è coinvolto, indipendentemente dall'età. Non è, almeno nelle sue fasi iniziali, altrettanto semplice, ed è capitato in più di una occasione che anche gli adulti, per esempio nella fase illustrata in fig.3, rimanessero imbarazzati nella riproduzione del meccanismo che genera il cubo pop-up.
- Sono molto importanti, in chi affronta il pop-up, l'abitudine alla manipolazione, l'atteggiamento esplorativo, la dimestichezza con molti strumenti. L'attività è per sua natura *dinamica* e stimola fortemente questi atteggiamenti. Ad esempio, il vedere la ricchezza di certi pop-up costruiti dai compagni induce una graduale emulazione accompagnata dalla progressiva acquisizione di una crescente autonomia (sia progettuale che nell'esecuzione).
- Soprattutto durante i primi tentativi, è importante porre gli alunni contemporaneamente di fronte al progetto e al corrispondente solido e verificare se capiscono il rapporto fra i due con domande del tipo “Su quale linea del progetto appoggeresti la base di un albero?” “Dove disegneresti una persona distesa su un prato?” “Immagina che un tuo pop-up raffiguri il mare. Dove disegneresti delle vele all'orizzonte?” “Disegna degli uccelli in volo” e così via.
- Riteniamo che il pop-up sia produttivo in sé (attraverso l'esplorazione delle caratteristiche geometriche dei suoi meccanismi) e come strumento (è molto semplice che le classi si dotino di solidi animati che consentono di sperimentare situazioni concernenti la geometria dello spazio; c'è anche la possibilità di costruire parallelepipedi *non retti*).
- Come dicevamo all'inizio, vi sono altri meccanismi che probabilmente è altrettanto interessante esplorare. Vi sono, ad esempio, le “piegature a V” che consentono di far emergere dal foglio di base due o più diedri paralleli fra loro e implicano uno studio sul rapporto fra angoli e piegature. Ma questa, come si dice, è un'altra storia.

Bibliografia

Hiner M.: 1987, *Paper engineering for pop-up books and cards*, Tarquin publications, York, England.



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PARMA

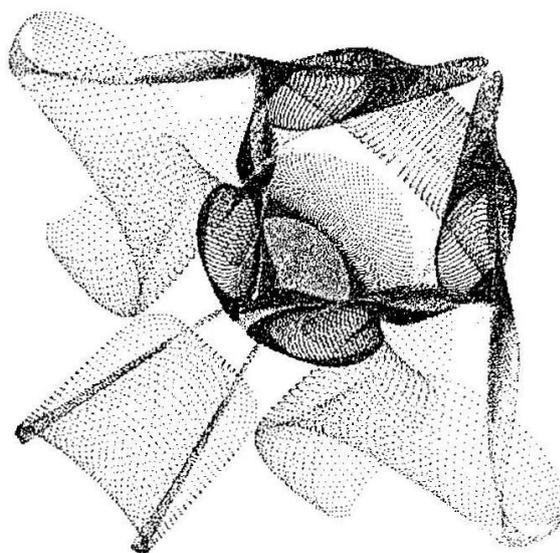
DIPARTIMENTO
DI MATEMATICA

**DALLO SPAZIO DEL BAMBINO
AGLI SPAZI DELLA GEOMETRIA**
Atti del 2° Internuclei Scuola dell'Obbligo 1997

DALLO SPAZIO DEL BAMBINO AGLI SPAZI DELLA GEOMETRIA

Atti del 2° Internuclei Scuola dell'Obbligo
(Salsomaggiore Terme, 10-12 aprile 1997)

A cura di Lucia Grugnetti
con la collaborazione di Silvano Gregori



PARMA 1997