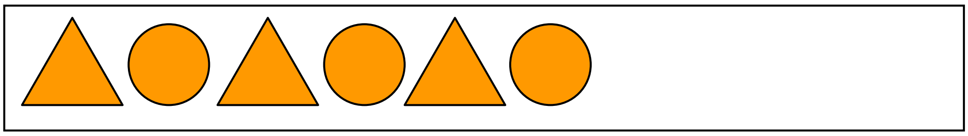
Progetto ArAl	1	Studio di regolarità: dai fregi alle successioni aritmetiche

Tione (TN)	I	1	2	3	4	5	1	2	3	Mariella Bonomini

Commenti insegnante (√ nel diario, I nei Commenti)
Commenti Navarra

25 gennaio 2008 - Diario 1 - classe 5B - *uso del registratore*

Dopo aver mostrato questo disegno.



√: Oggi vi ripropongo un'attività basata sulle figure[1], o possiamo dire quelle che quando eravamo piccoli chiamavamo cornicette, che ora chiameremo fregio o abbellimento. Vorrei proporvi questa cornicetta[2] per vedere se riuscite a riconoscere la sequenza da cui è formata. Vediamo se riuscite a suggerirmi cosa potrei fare per continuare il fregio all'infinito da una parte e dall'altra[3]. (*Qui i bambini fanno troppo silenzio intimoriti del registratore*).
√: Potrei avere la possibilità di costruire uno stampino che mi aiuti a continuare la cornicetta[4]?

---

[1] *Credo che la definizione dell'attività sia riduttiva, e che gli alunni possano essere indotti a pensare ad un'attività che si sviluppa in ambito geometrico. In realtà il percorso esplora lo studio di regolarità, e l'esplorazione dei fregi prepara il terreno a quella delle successioni aritmetiche. Suggerisco la lettura dell'Unità 7 della Collana ArAl, dedicata proprio a questo argomento; può aiutare ad inquadrare 'in prospettiva' l'attività sui fregi.*

[2] *Sarebbe meglio distinguere (visto che siamo in una quinta) i termini in uso nel linguaggio specifico della matematica da quelli che non lo sono. Il termine* fregio *lo è – indica ciò che si ottiene attraverso la traslazione di un elemento base detto modulo – mentre 'abbellimento' è un termine più generico, e non appartiene al linguaggio della matematica, come pure 'cornicetta', che richiama un termine in uso quando nella scuola dell'infanzia o in prima elementare si lavora con gli 'stampini'.*

[3] *Una successione in matematica è infinita. Dire però che lo è 'da una parte e dall'altra' non è corretto. Riporto la definizione di 'Successione' presente nel Glossario dell'Unità 10 della quale suggerisco di prendere visione.*

Il concetto di successione nasce, per estensione, da comuni esperienze di seriazione, dove, di fronte ad un insieme di elementi, prendendo come riferimento la sequenza verbale numerica, si trasferisce l'ordinamento di un segmento iniziale di naturali all'insieme dato assegnandogli un ordine (ricordiamo che l'ordinamento dei naturali nasce dal loro processo di generazione a partire dallo zero mediante l'operatore "+1").

La lista delle lettere dell'alfabeto è uno degli esempi basilari. La sua elencazione è il risultato di un processo di corrispondenza che ad 1 associa la lettera A, al 2 la B, al 3 la C e così via. Questo criterio sta alla base della costituzione di tutti i tipi possibili di elenchi e liste. In genere tali esperienze, riguardando insiemi *finiti*, non consentono di andare 'oltre' e di cogliere 'l'infinità' insita nel processo di corrispondenza.

Da un punto di vista matematico per '*successione' si intende una corrispondenza che assegna ad ogni numero naturale un elemento di un fissato insieme*. Ad esempio: la scrittura 0; 3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; … indica la corrispondenza che ad ogni naturale *n* associa il numero 3*n*. La corrispondenza è quella che, da un punto di vista funzionale si rappresenta come l'operatore '×3'.

0	1	2	3	4	5	6	7
×3							
0	3	6	9	12	15	18	21

In una successione può accadere che a posti diversi possa anche corrispondere lo stesso oggetto. Per mettere bene in luce questo fatto, si consideri la seguente successione costituita dalla ripetizione del modulo 'quadrato tondo triangolo'.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓

Gli elementi del modulo costituiscono l'insieme degli elementi che corrispondono ai numeri naturali. Il quadrato _viene a corrispondere ai numeri 1; 4; 7; 10; il tondo ai numeri 2; 5; 8; 11; il triangolo ai numeri 3; 6; 9;12 e così via.

Storicamente hanno particolare interesse le successioni che si possono generare a partire da un numero dato.

In un primo caso, aggiungendo lo stesso numero ai risultati via via ottenuti. Ad esempio, la successione 5; 8; 11; 14; 17; … si ottiene aggiungendo 3 al numero 5, poi aggiungendo 3 al risultato 8, di nuovo 3 al risultato 11, e così via. Nel secondo caso, la successione 2; 6; 18; 54; 162; … si ottiene moltiplicando 2 per 3, poi moltiplicando per 3 il risultato 6, moltiplicando di nuovo per 3 il risultato 18, e così via.

Queste successioni, per il particolare algoritmo che le genera, sono dette rispettivamente *progressioni aritmetiche* e *progressioni geometriche*. Sono state studiate sin dall'antichità anche per la loro interessante analogia strutturale.

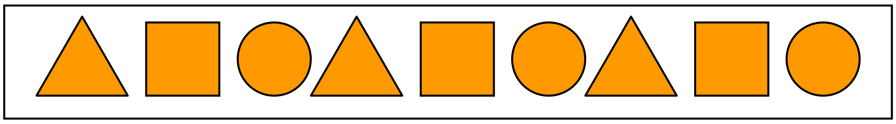
[4] *Penso che bisogni alzare il livello del linguaggio, e introdurre i termini 'modulo' e 'successione'.*

Giulio: Farei dei disegni
√: Vediamo come è costruita questa sequenza.
Tutti: Triangolo, cerchio, triangolo, cerchio, triangolo, cerchio...
√: Cosa verrà dopo?
Alcuni: Un triangolo e un cerchio
Mustafà: Un triangolo
√: Voi cosa dite: un triangolo o un triangolo e un cerchio?
Mustafà: E dopo continui con un cerchio
√: Allora se dovessi continuare con la sequenza triangolo cerchio completerei la sequenza?
Tutti: Sì
√: Posso dire che la sequenza o stampino[5] è fatto da -triangolo-cerchio-?
Tutti concordano per uno stampino triangolo cerchio.
Lorenzo: Ma se voglio andare dall'altra parte per arrivare all'infinito devo fare -cerchio triangolo[6] (*indicando da destra verso sinistra*).
√: Ah bene! Tu dici che per andare verso destra io dovrei fare -cerchio triangolo- Siete tutti d'accordo?
Alcuni: Sì sarebbe cerchio triangolo
Altri: No altri dicono triangolo cerchio
Lorenzo: Prima cerchio e poi triangolo
√: Ma tu vedi prima da destra verso sinistra o da sinistra verso destra?
Nicolò: Prima triangolo e poi cerchio, lo stesso
√: Lo stampino sarebbe sempre lo stesso sia che vada verso destra sia che vada verso sinistra. Va bene[7]. Torniamo alla nostra cornicetta: ci sono 6 figure che si ripetono sempre -triangolo e cerchio. Che figura ci sarebbe al 16° posto?
Giulio: Cerchio
Altri: Sì, cerchio
√: Giulio, mi puoi spiegare come hai fatto?
Giulio: Ho contato triangolo - cerchio fino al 16°
Celeste: Io ho ripetuto fingendo di avere i 16 disegni e sono arrivata al cerchio
Tutti concordano.
Nicolò: Ma il triangolo è il primo ed è un numero dispari, poi invece il rotondo è un numero pari e allora il 16° segno e un cerchio.
√: Qual è la modalità di soluzione più veloce?
Mirco: Quella di Nicolò!
√: Per cui se ora io vi chiedo qual è la figura che si trova al 127° posto cosa mi dite?
Tutti: Triangolo
√: Quale modalità avete usato?
Tutti: Quella di Nicolò
√: Allora qual è il segno che sta al 1634 posto?
Tutti: Cerchio perché e pari

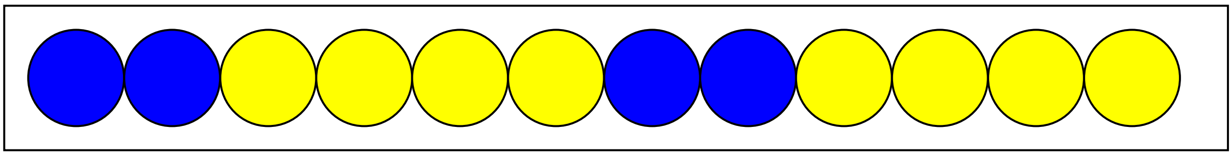
---

[5] *Permane l'ambiguità terminologica. I ha usato per indicare* <u>*la successione*</u> *i termini: fregio, abbellimento, cornicetta; per indicare* <u>*il modulo*</u> *i termini: sequenza, stampino. In effetti, come viene spiegato anche nel Commento della pagina precedente, è più frequente che con il termine 'sequenza' si indichi la successione piuttosto che il modulo.*
[6] *Ecco che si presenta il misconcetto, legato alla possibilità di continuare la successione sia verso sinistra che verso destra. Bisogna che ci sia un* <u>*inizio*</u>*, che ne determina automaticamente il verso. Se non fosse così sarebbe impossibile individuare il modulo. Temo che questa ambiguità condizioni tutta l'attività.*
[7] *Mi riferisco ora ad un termine della teoria delle situazioni di Brousseau:* istituzionalizzazione della conoscenza attivata. *È il momento in cui l'insegnante riconosce come 'legittimo e spendibile' nella classe il sapere acquisito sino a quel momento. Credo che con 'Va bene', I abbia di fatto 'resa ufficiale' nella classe l'idea della successione 'bifronte'. Se non vengono fatti degli interventi per cambiare questa idea nel prosieguo della lezione, bisognerà attivare un intervento didattico che indirizzi correttamente il punto di vista.*

√: Direi un bravissimo a Nicolò perché ha notato una regolarità che ci può aiutare molto. Ora vi ripropongo un'altra cornicetta: questa volta ha tre disegni triangolo-quadrato cerchio[8]: qual è lo stampino base[9]?



Mirco: 3 per 3 per cui l'ultimo è un cerchio
√: Avete capito il ragionamento di Mirco[10]. E se vi dico la figura che sta al 27° posto?
Andrea: Cerchio perché se io faccio la tabellina del 3[11] è automatico che è il cerchio.
√: E se io vi dico qual è la figura che sta al 37° posto?
Alcuni dicono triangolo altri correggono con il cerchio.
√: Cerchio o triangolo?
Tutti: Triangolo
Lorenzo: Dovrebbe essere al 36° posto per essere un cerchio invece è uno di più.
√: Perché non può essere un cerchio?
Mustafà: Perché non è un multiplo di 3.
√: Ma allora come avete fatto a capire che è un triangolo?
Lorenzo: Perché dopo il numero che è la tabellina del 3 si ricomincia daccapo con triangolo e poi avanti.
√: E se io dicessi 43° posto?
Enrico: Triangolo
√: Perché?
Enrico: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, poi ho tolto un 2 e sono arrivato al triangolo
√: E se io dicessi al 35° posto
Tanti: Quadrato
√: Come avete fatto?
Marco: 3 per 11 arrivo al 33 + 2 fa 35
√: Marco ha fatto 3 per 11 è arrivato al 33 + 2 e poi ha contato due posti
Marco: A 33 finisco la sequenza e poi conto ancora due figure
√: Bravo! E se io dicessi al 23 posto
Yuri: È un quadrato
√: Come hai fatto?
Yuri: 3 per 7 più 2, per cui è un quadrato
√: Ora vi propongo un'altra sequenza: questa volta potrebbe essere una collana di perline blu e gialle.



[8] *I introduce in questo momento un ulteriore termine per il modulo: 'disegno'. A parte questo, faccio rilevare alcune questioni. Primo: affermare 'questa volta ha tre disegni' (per inciso, adottando il modo di dire di I, anche il primo fregio 'aveva tre disegni') porta gli alunni a concentrarsi su un numero* finito *di elementi, come se questo aspetto fosse importante. In realtà, il fatto che la successione che si presenta sia fatta da cinque, nove o tredici figure non ha nessuna importanza, è del tutto casuale, è un aspetto che non va minimamente enfatizzato, perché distrae; l'unico principio è che il numero dei disegni sia sufficiente per ipotizzare un modulo e per verificarlo (se i disegni sono pochi è difficile stabilirlo). Secondo: gli alunni devono esplorare la parte 'visibile' della successione per scoprire il modulo; se l'insegnante dice 'tre disegni' specificando addirittura quali sono, ha fornito un'indicazione che impoverisce l'esplorazione rendendo poi meccanica la ricerca della tale figura. In conclusione, bisogna chiarire innanzitutto che: (a) fra i tanti modi di porre in sequenza dei disegni si esaminerà quello formato dalla ripetizione di un gruppo di elementi chiamato modulo; (b) il fregio è infinito; (c) il primo disegno è il primo elemento del fregio. Poi si propone un fregio e si lascia campo agli alunni di cercare il modulo.*

[9] *'Stampino base' sta per 'disegno' usato due parole prima. L'uso di un linguaggio corretto e univoco da parte dell'insegnante è fondamentale.*

[10] *Attenzione che la domanda sembra contenere in sé la risposta affermativa. Chi ci dice che gli altri abbiano davvero capito? È opportuno che la verifica sia costante; non rappresenta una perdita di tempo, ma un momento essenziale di condivisione.*

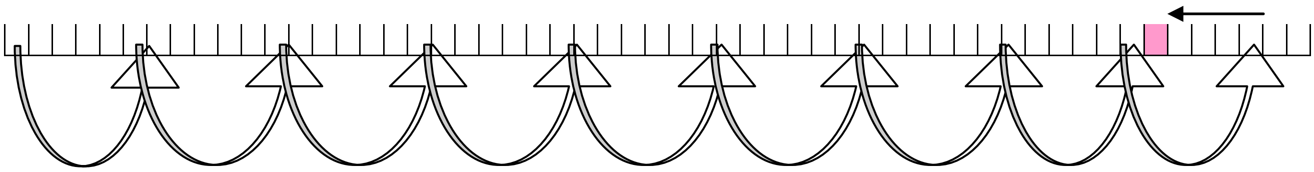
[11] *Anche questa affermazione andrebbe condivisa.*

√: Prendete il quaderno e provate a descrivere come spieghereste questa sequenza
Alcuni: Come?
√: Prima avete descritto la sequenza in questo modo: triangolo-cerchio, vediamo ora che idee vi vengono.
La classe lavora.
√: Finito? Allora vediamo…
Giulio: Secondo me la sequenza è 2 blu più 4 gialle
√: Altri modi?
Nicolò: Uguale come Giulio
Enrico: 2 blu e 4 gialle moltiplicate per 2 volte
√: Moltiplicata per...
Enrico: Per 1 o per 2 o per altri numeri
√: Dici per 2 perché in questo disegno mostriamo solo un pezzo di collana ma poi aggiungi che potrebbe essere moltiplicato per un numero qualsiasi di volte. Possiamo dire 2 blu moltiplicato per n volte intendendo per n un numero di volte che voglio (*scrivo alla lavagna*[12]) 1 se la voglio corta e 93 se la voglio lunga. Altre soluzioni?
Giulio: Però potrebbe essere 2 gialle, 2 blu, due gialle e poi si continua così
Lorenzo: Non va bene perché parte con il blu non con il giallo
√: Ma a dir la verità all'inizio ho detto che va all'infinito. C'è un punto di partenza in una linea infinita? E ho detto che vi presento un pezzo di collana! [13].
Alcuni: Allora va bene anche questa perché si ripete 2 gialle, 2 blu, 2 gialle
Lorenzo: Allora va bene anche 3 gialle e 2 blu
Enrico: E no perché dopo ne manca 1 quando devi ripetere
Mirco: Allora va bene 1 gialla, 2 blu, 3 gialle
√: Sì questa va bene, vediamola sul disegno (*evidenzio la sequenza e fingo di ripeterla*)
Enrico: Allora ve bene anche 3 gialle, 2 blu, 1gialla
√: Uauh! Quante soluzioni! Proviamo a scriverle (*scrivo alla lavagna 3g+2b+1b*). Io tra una perla e l'altra metto il segno più va bene?[14]
Nessuna risposta
√: Secondo voi perché ho messo i più. Cosa sta a significare questo segno?
Andrea: Che attacchi, che unisci.
Nicolò: Anche 1 blu, 4 gialle, 1 blu
√: Va bene! Ne abbiamo trovate parecchie di sequenze, ma quale di queste ci potrebbe essere utile per trovare la perlina che sta al 84° posto?
Nessuna risposta[15]
√: Qual è la perlina che sta all'84° posto
Giulio: È blu
√: Come hai fatto?
Giulio: Sono andato avanti per 6
Celeste: Per me è gialla
√: Come hai fatto
Celeste: Ho contato fino all'84
√: Hai contato fino a 84: sei sicura di aver contato giusto per così tanti numeri?
Enrico: Io ho fatto 6 per 14 fa 84, ho contato 14 palline ed è venuto blu
√: Perché hai contato 14 palline?
Enrico: Boh!
√: Confusione, perché?
Giulio: Dipende se parto da quella blu o da quella gialla[16]
Mirco e Lorenzo: (*sostenendo Giulio*) È vero, bisogna vedere da dove parto[17]

---

[12] *Penso che sarebbe meglio se fossero gli alunni a costruire la rappresentazione in linguaggio matematico della regolarità. Le traduzioni da un linguaggio all'altro sono di grande importanza nella costruzione dei significati.*
[13] *Mi son resa conto che questo è un punto dolente perché non ha senso parlando di infinito proporre problemi come trova la 65° perlina, se non c'è un punto di partenza sicuro! Per cui... Bene. Ora si tratterà di puntualizzare gli aspetti illustrati nei Commenti precedenti, e l'attività potrà decollare in un modo più chiaro.*
[14] *I tende a 'riempire' spazi che dovrebbero essere di pertinenza degli alunni. La formalizzazione è un obiettivo in prospettiva, non si possono bruciare le tappe, altrimenti il balbettio algebrico non si costruisce. Una scrittura come quella elaborata da I (3g+2b+1b) cosa significa? Come interpretano gli alunni il segno le lettere? Come 'numeri sconosciuti'? E il segno '+'?*
[15] *È inevitabile. Il concetto di modulo è troppo confuso.*
[16] *Se non si chiarisce il concetto dell'inizio non si riesce ad andare avanti.*
[17] *Si verifica la sensazione che ho avuto nella nota 1 per cui correggo il tiro!!!*

√: Partiamo dalla sequenza disegnata per cui partiamo dalla perla gialla. Quale sarà la pallina di questa sequenza?
Giulio: Allora è gialla
Lorenzo: Sì, perché conto per 6 fino a…
√: Contiamo insieme
Tutti: 6, 12, 18, ... fino a 84
Enrico: Siccome l'ultima di sei è gialla, l'ultima pallina è gialla.
√: E se io dicessi cercate la pallina 1227?
Lorenzo: È blu
Mirco: È blu perché è dispari
√: È solo dispari la blu?
Enrico: Conto le ultime 7
√: Perché conti le ultime 7
Enrico: Boh![18]
√: Torniamo con un numero più semplice, troviamo la 37
In coro: Blu
√: Perché?
?: Perché 3 per 3 36 e poi torni all'inizio…
√: Cos'è che è importante?
Mirco: Continuare a fare il multiplo di 6
Giulio: È vero ma poi faccio +1
√: Ma cos'è quell'1?
Nessuna risposta[19]
√: E se io cerco la perlina al 50 posto?
Alcuni: Giallo
√: Come avete fatto?[20] Possiamo scrivere un'operazione per dire quello che abbiamo fatto?[21]
Valentina: 6 per 9 fa 54 e poi torno indietro di 4 e arrivo alla blu
√: Scrivo 6 x 9 54 -4[22]
Lorenzo: Ma si può fare anche 6x8 +2 e arrivo alla blu.
Molti non capiscono allora disegno una linea dei numeri alla lavagna e faccio questo disegno[23]*:*



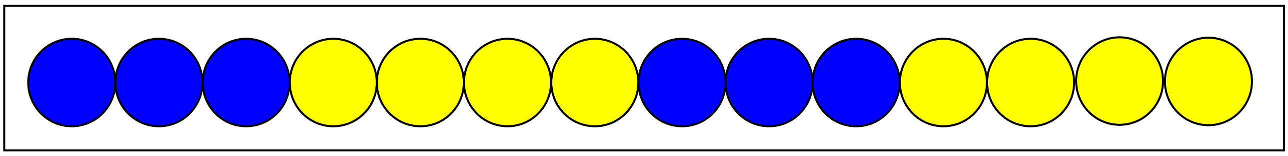
E scrivo 6 x 9 - 4
6 x 8 + 2

Mirco: Ma tanto è lo stesso arrivo sempre al blu
√: Torniamo alle perline di prima: qual è la perlina che sta al 92° posto?
Mirco: Blu
√: Perché?

---

[18] *Si potrebbe approfittare dei 'Boh!' di Enrico per riflettere collettivamente sul fatto che ogni affermazione deve essere supportata da un ragionamento, perché se una discussione non è basata sulla trasparenza non favorisce una reale costruzione di significati.*
[19] *Forse la domanda andrebbe riformulata in modo diverso, perché la risposta costituirà un elemento nodale per la prosecuzione dell'attività.*
[20] *Penso che I formuli delle domande troppo tese sull'esplicitazione del* prodotto, *che inducono risposte limitate all'enunciazione del colore della perla. Propongo di modificare la domanda in modo da evidenziare il* processo, *per esempio: 'Chi mi spiega come fare per trovare il colore della ... perla?'. Bisogna abituare gli alunni a superare* l'ansia da risultato. *[*Navarra, 21.4.08: COMMENTO NON CALZANTE*; I AVEVA CHIESTO 'COME AVETE FATTO?']*
[21] *Bene la domanda, ma suggerisco di tenere separati i due livelli linguistici: chiedere prima una descrizione il più chiara possibile in linguaggio naturale, e poi passare alla sua traduzione in linguaggio matematico.*
[22] *V. Commento 15. L'insegnante si sostituisce troppo agli alunni, forse per il timore di investire troppo tempo nell'attività.*
[23] *Ottima la strategia che, per numerose esperienze dirette, si rivela molto efficace.*

Mirco: 6 per 15 fa 90 e poi più 2
√: Come hai fatto a trovare il 15?
Mirco: Ho contato per 6 fino ad arrivare al 90
Giulio: Conto quante volte ci sta dentro il 6 fino al numero più vicino al 92
√: Ma che operazione faccio?
Enrico: Una moltiplicazione perché conto per 6
√: Fate attenzione a quello che ha detto Giulio: "conto quante volte ci sta dentro"[24], che operazione si usa per vedere quante volte ci sta dentro?
Giulio: Una divisione
√: Finalmente! Una divisione! Proviamola quale sarà questa?
Andrea: 92 : 6 = 15 con resto di 2 e poi conto le due palline il resto daccapo per vedere che tipo di perlina trovo[25].
√: Proviamo ora a trovare la perlina n 63
Ilaria: 63: 6 = 60 con resto di 3 e poi conto le tre perline ed è gialla
√: Proviamo con un numero ancora più difficile. Cerchiamo la perlina n°1567
Mirco: Fa 261 con resto di 1 allora è blu
√: Puoi ripetermi l'operazione che hai fatto?
Mirco: Ho fatto 1567: 6= 261 con resto 1, la prima perlina della sequenza è blu!
Anche altri confermano questa operazione e questo risultato
√: Proviamo questa: trovatemi il colore della perlina 7835.
Lavorano tutti freneticamente sul quaderno e i più quasi in coro dicono "è gialla perché 7835:6=1305 con resto 5; la perlina è gialla"
√: Mi sembra che abbiate capito il meccanismo anche troppo bene per cui cambiamo sequenza: vi propongo questa...



... e vi chiedo, lavorate pure sul quaderno, che perlina sarà la 92°?
Giulio: È blu perché 92:7 =13 con resto 1 e la prima perlina è blu.
Anche altri confermano appena finito di lavorare sul quaderno.
√: Mi pare che siate tutti d'accordo. Ma dove avete preso il 7? Prima come divisore avevate il 6?
Andrea: È il 7 perché la sequenza da ripetere è di 7 figure.
Nicolò: Eh sì! Perché 3 blu più 4 gialle fa 7.

---

[24] *Intervento efficace, che ha permesso di fare un notevole passo avanti.*
[25] *Dev'essere scappata qualche parola dalla registrazione e non riesco a capire l'intervento.*

28 gennaio 2008 - Diario 2 - classe 5B - *uso del registratore*

√: Ripartiamo dall'attività che abbiamo fatto la volta scorsa; ricordate la successione di figure della quale bisognava trovare la figura che stava in un posto ben definito, come all'82°? Vediamo se ricordate la regola che avevamo trovato alla fine. Per partire vi propongo delle parole anziché delle figure:

ciaociaociaociaociao[26]

√: Ricordate che dovete dirmi come avete fatto, che procedimento avete adottato. Potete lavorare sul quaderno: la lettera che mi cercate è quella al 145° posto.
Mirco: È la lettera C; ho fatto la divisione 145 : 4 = 36 con resto 1 e poi ho contato le letterine del resto ed è risultato C.
Io riscrivo la divisione alla lavagna e poi dico:
√: Come hai fatto a trovare questo 4?
Mirco: È un 4 perché la parola ciao è formata da quattro lettere per cui la sequenza è di 4.
√: Proviamo adesso con questa parola qua:

marcomarcomarcomarcomarco

Cominciano tutti a leggere marcomarcomarco…
Nicolò: Ma potrebbe essere comarcomarcomar...
Lorenzo: Cos'è comar?
√: Chi lo sa cosa vuol dire comar?
Luca: È una donna bisbetica e chiacchierona, lo dice sempre la mia nonna a mia sorella!
√: Sì è vero. Va bene. Dobbiamo stabilire il punto di partenza come abbiamo detto la volta scorsa. Cosa consideriamo, 'marco' o 'comar'?
Marco: 'marco', dai!
√: Va bene, facciamo 'marco'[27]. Allora cerchiamo la lettera al 3475° posto.
Tutti lavorano sul quaderno.
Valentina: Ho fatto 3475 : 5 che fa 695 con resto di zero. Ho fatto 5 perché Marco ha 5 lettere.
√: Benissimo! Qual è allora la letterina?
Valentina: La 'o' perché è l'ultima letterina della sequenza.
Tanti approvano e dicono di aver fatto così anche loro.
√: Adesso vi propongo questa...

oggièlunedìoggièlunedìoggièlunedì

... e mi trovate la letterina n° 1963
Enrico: La I di oggi
√: Come hai fatto
Enrico: 1962 : 11 che fa 178 con 4 di resto.
√: Con 4 di resto (riscrivo l'operazione alla lavagna)

1962 : 11 = 178	4 di resto

---

[26] *Un aspetto importante, da non sottovalutare: vedo che tutte le sequenze si concludono con una parola (cioè con un modulo) completa. Consiglio di interrompere l'ultimo modulo per non creare lo stereotipo che il modulo finale debba essere sempre completo e per favorire quindi l'idea che l'interruzione è casuale 'perché si sa che la successione è infinita'.*

[27] *Non vorrei che la classe prendesse la frase dell'insegnante come una 'concessione'. In realtà qui c'è poco da scegliere, il modulo è 'marco' perché si conviene che – salvo un'eventuale decisione contraria da assumere collegialmente - la prima lettera sia l'inizio della sequenza. Su questo aspetto bisogna fare assoluta chiarezza, anche perché forse questa ambiguità deriva dall'introduzione alla prima lezione in cui l'insegnante aveva detto che la successione può continuare sia verso sinistra che verso destra (v. Commento 3). Pensare a 'comar' è simpatico, ma è errato, perché si dovrebbe avere la sequenza 'comarcomarcomarcomarcomarcom…'. È opportuno che l'insegnante ritorni sull'argomento e puntualizzi la questione.*

Enrico: La quarta letterina della frase è la i di oggi
Anche la maggior parte degli alunni conferma di aver fatto così.
√: C'è qualcuno che ha usato altre strategie al posto della divisione? Perché non fate come l'altra volta che contavate cercando tutti i multipli?[28]
Nicolò: Ma con la divisione è molto più veloce anche con i numeri grandi.
√: Siete tutti d'accordo?
Tutti: Sììì!
√: Allora possiamo tirare questa conclusione: l'altra volta mi avreste detto che per trovare avremmo dovuto fare così: 178 per 11 fa 1962 con resto di 4. Giusto?
Lorenzo: Come?[29]
√: Torniamo ad un esempio più semplice: ho 2 perle bianche e tre nere e voglio trovare la perlina al 26° posto, l'altra volta mi avete proposto un'operazione diversa da quella che fate oggi velocemente.
Giulio : Era un per
√: Esatto, o meglio diciamo una...[30]
Mustafà: Moltiplicazione
√: E veniva sbagliata con quella modalità?
Luca: No era lo stesso ma va più bene con i numeri piccoli perché devi contare i multipli.
√: Bravissimo, per cui sono entrambe esatte. Proviamo a scriverle.
Alla lavagna io scrivo mentre gli alunni dettano.
Andrea: 26 diviso 5 uguale 5 più 1 di resto
√: C'è un altro modo
Giulio: 5 per 5 più 1 di resto
√: E che cosa fanno?
Mirco: 26
Alla lavagna resta scritto: 26 : 5 = 5 + 1 5 × 5 + 1 = 26.

26 : 5 = 5 + 1 di resto	5 × 5 + 1 di resto

√: C'è un altro modo?
Lorenzo: 26 - 1 = 5 × 5[31].
√: C'è un altro modo?
Nicolò: 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 1 = 26

---

[28] *Ottima domanda di riflessione. Induce la risposta di Nicolò; non è detto che sia chiara davvero a tutti come sembrerebbe dalla coralità della successiva risposta, ma probabilmente molti altri la condividono.*
[29] *Lo stupore di Lorenzo è una conferma dell'osservazione precedente.*
[30] *Puntualizzazione molto corretta. La cura verso il linguaggio è una componente essenziale nella costruzione del pensiero pre-algebrico. Consiglio di ritornarci su ogni volta che se ne presenta l'occasione.*
[31] *La proposta di Lorenzo è molto importante e andrebbe valorizzata, altrimenti rischia di essere messa allo stesso livello di quella di Nicolò, più semplice, avente una struttura additiva. Per spiegare l'importanza di tale proposta riporto una parte dell'Espansione 1 presente in Navarra G., Giacomin A., 2005:* Unità 7, Studio di regolarità: dai fregi alle successioni aritmetiche, *Pitagora Editrice Bologna.:*

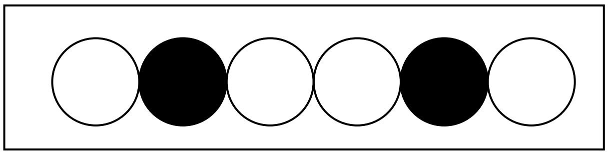
Espansione 1: Verso la generalizzazione delle rappresentazioni della divisione

È importante che gli alunni vedano nella divisione un'operazione binaria, che agisce su una coppia di numeri (il dividendo e il divisore) che ha come risultato un'altra coppia: il quoziente e il resto. È altrettanto importante indurre gli alunni ad esprimere in più modi il legame tra dividendo, divisore, quoziente e resto. Ad esempio, la divisione fra 15 e 6 porta al quoziente 2 e al resto 3. Le relazioni fra i quattro numeri possono essere rappresentate in più modi:
- *15 = 2 × 6 + 3*
- *15 - 2 × 6 = 3*
- *(15 – 3) : 6 = 2*

Con alunni più grandi si può puntare alla generalizzazione: dati due numeri naturali a e b, con b > 0, e detti q ed r rispettivamente il quoziente e il resto, possiamo esprimere in più modi le relazioni fra di essi:
- *a = q × b + r*
- *a – q × b = r*
- *(a - r) : b = q.*

Questo esercizio di trascrizione, se fatto abitualmente sin dal primo approccio alla divisione, eviterà in generale note rigidità nella codifica formale di tale legame e favorirà la flessibilità nel realizzare le trasformazioni algebriche.

√: C'è un altro modo? Vi ricordo che abbiamo fatto le potenze!
Nicolò: $5^2 + 1 = 26$
√: Siccome questo vale con il numero 26 con questa serie di perline, potrebbe valere se ho una sequenza diversa come questa[32]: 1 bianca, una nera e una bianca e dovessi trovare la perlina che sta al 16° posto posso usare tutti questi modi?



Giulio: 16: 3 = 5 + 1[33]
Lorenzo: 5 × 3 + 1 = 26, no cioè 16[34]
Nicolò: 16 - 1 = 5 × 3[35]
√: Posso usare anche questa (e indico la potenza)?
Enrico: No, né 5^2 ne 3^2
Lorenzo: È vero! Ci dà un risultato diverso[36]
√: Posso usare l'addizione?[37]
Andrea: No, sarebbero due addizioni diverse!
√: E se io scrivessi così?:

26 - 1 :

Lorenzo e Nicolò continuano anticipando la scrittura 5 = 5.
√: Attenzione: ricordate le espressioni che abbiamo fatto il mese scorso? Posso fare 26 - 1 : 5 e fare prima la sottrazione?
Mirco: No, bisogna fare prima la divisione
√: Allora provate a dettarmi l'espressione corretta. *Scrivo alla lavagna: gli alunni mi dettano e facciamo delle operazioni insieme alla lavagna*

26 - 1 :
26 - (1 : 5) = 26 - 0,2 = 25,8

Lorenzo: Ma non vien fuori 5
Luca: Bisogna mettere le parentesi tonde con la sottrazione.
√: Provate a dettarmi in altro modo:
Gli alunni dettano:

---

[32] *La sequenza è troppo breve; la classe ormai ha capito la situazione e intuisce che l'insegnante ha disegnato due moduli, ma potrebbe essere benissimo, per capirci, il modulo ABAABA. Assicuro che non è questione di lana caprina.*
[33] *Quando ci sono molte proposte, come in questo caso, è sempre opportuno sottoporle alla valutazione della classe, in modo da scoprire eventuali scritture diverse ma equivalenti, o errori, come in questo caso. Giulio 'manipola' la divisione aggiungendo semplicemente il resto al quoziente, ma in questo modo non ottiene una uguaglianza corretta. Il fatto è che Giulio ha una visione* procedurale *dell'uguale, legato, appunto, alla procedura della divisione. La sua è una concezione* direzionale *dell'uguale: 'a sinistra dell'uguale ho l'*operazione *e a destra dell'uguale* il risultato. *Siccome però la divisione non è esatta, devo aggiungere il resto'. Solo che in questo modo i conti non tornano. Il passaggio dell'uguale dal suo significato 'originario' direzionale (da sinistra a destra) a quello 'vero' relazionale (mette in relazione di equivalenza due rappresentazioni dello stesso numero) è un passaggio cruciale verso la costruzione del pensiero pre-algebrico.*
[34] *Al di là del banale errore di calcolo, Lorenzo conferma di aver capito. Bisognerebbe favorire la socializzazione della sua conoscenza.*
[35] *Le proposte di Lorenzo e Nicolò riconducono all'Espansione 1.*
[36] *Non capisco a quale 'calcolo diverso' alluda Lorenzo.*
[37] *Non capisco esattamente lo scopo dell'insegnante nel porre questa domanda.*

(26 - 1) : 5 = 5
25 : 5 = 5

Alcuni alunni: Adesso è giusta!
√: Vedete che valgono per tutti gli esempi che abbiamo fatto, allora potrei trasformare i numeri in lettere?
Alcuni alunni: Come!?
√: Sostituisco i numeri con le lettere[38], cioè metto delle lettere al posto dei numeri! Ad esempio il primo numero lo chiamo A (quello che rappresenta il posto della perlina), il secondo numero (quello che rappresenta la sequenza) lo chiamo B e così via.
Luca: E il risultato lo chiami Q come quoziente?
√: Se vi va bene si può fare!
Giulio: Ma non si può fare che A vale per l'1 e la B per il 2 così se devi scrivere 21 scrivi BA e così via…[39]
√: Se funzionasse così non potrei dire di sostituire un numero con una lettera ma con una serie di lettere che cambierebbero ogni volta, se volessi segnare 26 sarebbero le lettere BF, mentre se volessi segnare il 16 sarebbe AF e quindi ogni numero cambierebbe a seconda delle cifre. Io pensavo di sostituire non ogni cifra ma il numero intero a seconda della sua funzione. Mettiamola così: ogni dividendo lo potrei chiamare A, mentre il divisore lo chiamerei B e il risultato, come diceva Luca, Q come quoziente.
Mustafà: Ah! Non puoi chiamare D il divisore e anche il dividendo perché iniziano con la stessa lettera e allora li chiami A uno e B l'altro.
√: Bravissimo. Chi prova a trasformare questa operazione in numeri in una operazione con le lettere?
Mustafà: A : B = Q + R
Lorenzo: Ma non ho capito l'A e il B, ma cosa sono?[40]
√: La A rappresenta il dividendo e la B rappresenta il divisore, chi vuol provare a trasformare quest'altra operazione usando queste lettere.
Lorenzo: Ci provo io: A : B = Q + R[41]
√: E quest'altra?
Nicolò: A - R = Q × B
√: Vale anche per questa?[42]
Alcuni Alunni: A- R = Q × B
√: Vedete che usando le lettere posso scrivere la stessa operazione e vale per tutti i casi che abbiamo provato?[43]
Enrico: Anche con quella dopo Q × B + R = A, e anche con l'altra Q × B + R = A[44]
Così abbiamo visto che questa scrittura vale per questi due esempi. Vediamo se vale anche per altri:
√: Proviamo con questo: volete una sequenza di perline o di lettere?
Valentina: Di lettere
√: OK! Dettate
Celeste:

`alloraalloraallora`

√: Che lettera cerchiamo?
Celeste: La 143°
Valentina: Allora sarà: 142 : 6 = 23 + 4[45]

---

[38] *Attenzione, la lettera non sostituisce alcuni numeri, ma sta ad indicare un generico elemento dell'insieme. Tutt'al più si può parlare di sostituire una lettera con dei valori numerici, e allora si hanno delle particolarizzazioni. Sarà opportuno approfondire questi aspetti nel prossimo incontro a Tione.*
[39] *Questa non me l'aspettavo! Mi fermo un momento! Vedo poi che non mi sono sentita in grado di condurre un'argomentazione su questo argomento. In realtà la proposta di Giulio è tipica. Accade spesso che a qualche alunno venga l'idea di associare le lettere dell'alfabeto ai numeri.*
[40] *La domanda di Lorenzo è legittima. Credo che il passaggio alle lettere sia stato piuttosto brusco, soprattutto per il fatto che mi sembra che la classe non ne abbia esperienza. Mi rifaccio alla conclusione del Commento 38.*
[41] *Credo ci sia un errore nella trascrizione perché la frase è uguale alla precedente di Mustafà.*
[42] *Non capisco a quale scrittura si riferisca l'insegnante dicendo 'questa'. Probabilmente sta indicando frasi scritte alla lavagna.*
[43] *Sempre rifacendomi ai Commenti 38 e 40, approfondiremo nel prossimo incontro il concetto di 'generalizzazione'.*
[44] *Anche qui mancano i riferimenti e non seguo come vorrei lo sviluppo degli interventi.*
[45] *Attenzione che l'uguaglianza non è corretta (v. Commento 33), perché 142 : 6 ≠ 27. Valentina commette lo stesso errore di Giulio. Suggerirei di porre a confronto le scritture proposte dagli alunni (quelle aritmetiche, non quelle con le lettere) e verificare quali sono corrette e quali no. In questo modo si può porre in evidenza l'errore di Giulio e*

√: Me lo sai trasformare con le lettere come dicevamo prima?[46]
Valentina: A : B = Q + R[47]
Ilaria: Allora anche questa A - R = Q × B
√: Vediamo se è vero ritrasformandole in numeri
Lorenzo: A, cioè[48] 142 - 4 = 23 × 6
Mustafà: Eh! Ma è vero perché basta che tu sai la A cos'è, la B cos'è, la Q cos'è ed è già fatta:
√: Puoi rispiegarmi che non ho capito bene?
Mustafà: Sì, se so che la A vale per tutti i numeri che stanno davanti nella divisione e che la B è tutti i numeri che stanno dopo la divisione e che il risultato si chiama Q come quoziente, e la R è il resto, va bene!
√: Benissimo: proviamo a fare il contrario. Adesso partiamo dalle lettere per arrivare ai numeri: consideriamo ancora la nostra frase...

`alloraalloraallora`

... Mettiamo di dover trovare la lettera numero 96 e dobbiamo seguire la regola A : B = Q + R[49]
Nicolò: Sì va bene perché viene 96 : 6 = 16 + 0
Lorenzo: Anche se questa volta non c'è il resto!
√: Allora possiamo dire che possiamo usare delle lettere per scrivere una regola che vale per tutti i numeri?
Mustafà: Ma maestra c'è una regola per l'uso delle lettere?
√: Cosa intendi dire Mustafà se c'è una regola per sostituirle ai numeri o per operare tra di loro?
Mustafà: Sì per sostituirle i numeri: devo mettere sempre A al primo numero o posso cambiare e mettere quello che voglio io.
√: Penso proprio che puoi mettere quello che vuoi tu, hai visto che anche noi abbiamo usato la Q perché per comodità ci ricordava il quoziente. Anche oggi siete stati bravissimi, avete proprio ragionato benissimo. Andremo avanti la prossima volta.

Valentina e sottolineare il valore dell'uguale come relazione di equivalenza. Riporto, in relazione a questo tema, quello che scriviamo nel Glossario a proposito di questo costrutto (v. Glossario in www.aralweb.it):
La riflessione sull'uguaglianza, in particolare sull'interpretazione che gli alunni danno del segno di uguale come operatore direzionale, impone una riflessione sul significato, sulle proprietà e sull'uso delle relazioni di equivalenza. Le relazioni in un insieme possono godere di alcune proprietà; quelle che chiamiamo 'di equivalenza', in particolare, godono delle seguenti tre:
a) proprietà riflessiva: ogni elemento dell'insieme è in relazione con sé stesso;
b) proprietà simmetrica: se un elemento a è in relazione con un elemento b allora anche l'elemento b è in relazione con l'elemento a;
c) proprietà transitiva: se un elemento a è in relazione con un elemento b, e l'elemento b è in relazione con un elemento c, allora anche a è in relazione con c.
Sono esempi di relazioni di equivalenza in un insieme di persone: l'avere la stessa altezza, l'avere lo stesso peso, l'avere lo stesso nome, l'essere nati nello stesso anno. L'importanza delle relazioni di equivalenza risiede nel fatto che esse stanno alla base dell'uguaglianza, che di fatto risulta essere sempre una uguaglianza relativa a qualche carattere (nel caso degli esempi: uguaglianza in altezza, in peso, in anno di nascita). In una relazione d'equivalenza elementi tra loro in relazione sono detti equivalenti e possono essere identificati rispetto alla proprietà caratteristica della relazione. In molte nostre unità si è operato nell'insieme delle espressioni di numeri naturali e si sono identificate quelle con lo stesso risultato; quest'ultimo può considerarsi prototipo di tutte le espressioni equivalenti, ciascuna delle quali tuttavia è un legittimo rappresentante di questo.

[46] *Non è corretto parlare di 'trasformazione'. Si può accennare al fatto che quella relazione di equivalenza vale indipendentemente dai valori numerici in gioco. Le lettere quindi 'stanno al posto di', 'stanno per' i relativi numeri.*

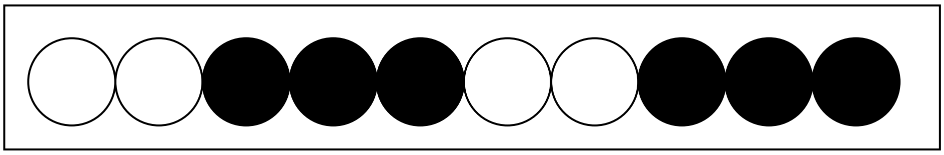
[47] *È la conseguenza dell'errore precedente.*

[48] *Non capisco cosa sia A.*

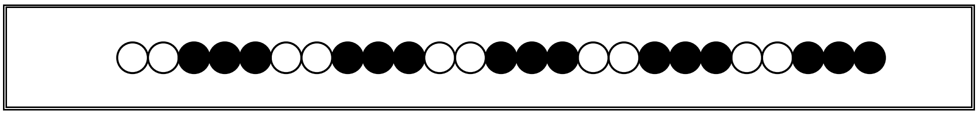
[49] *Purtroppo 96 è multiplo di 6, e quindi il resto è zero, e non ci si accorge che l'uguaglianza di partenza è sbagliata! Per esempio con 97 ve ne sareste accorti (97 : 6 ≠ 16 + 1). La relazione che 'funziona' è: 97 = 6 × 16 + 1 assieme alle sue derivate (che in parte gli alunni hanno già individuato) come 97 – 1 = 6 × 16, 97 - 6 × 16 = 1, (97 – 1) : 16 = 6 e così via.*

4 febbraio 2008 - Diario 3 - classe 5B - *uso del registratore*

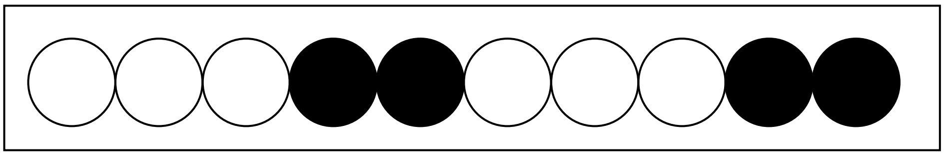
√: L'ultima volta vi avevo lasciato con questo quesito[50]...



... A che punto sta la 15ª perla nera?
Enrico: Le disegniamo?
√: Va bene: fate come credete
Nicolò: È la 9ª perla
Mirco: Quella è la 15ª fra tutte
Nicolò: Come, è la 15ª fra tutte?
Lorenzo: Sì, perché che vale è la 15ª solo delle nere[51]
Enrico: Al 25° posto *(Ha finito di disegnare)*
√: Perché?
Enrico: Perché ho contato 15 perle nere e in mezzo c'erano 10 perle bianche
√: Mi rifaresti il tuo disegno alla lavagna perché vedo che alcuni compagni non hanno capito la consegna.
Enrico disegna la situazione:



Nicolò: Ah, non avevo capito così.
Mirco: Ci sono 15 nere però ogni tre nere ce ne sono 2 bianche
Lorenzo: 15 nere più 10 bianche fa 25.
√: Proviamo a vedere un'altra sequenza:



√: A che punto sta la 9° perla nera?
Nicolò: È la prima di quelle nere.
Mustafa: Sì, è la prima delle nere[52].
√: Ma a che posto?
Giulio: Al 24° posto.
√: C'è qualche altra risposta?[53]

---

[50] *Per la lunghezza della sequenza da mostrare agli alunni v. Commento 26.*
[51] *Bene lo scambio Nicolò-Mirco-Nicolò-Lorenzo; bisognerebbe cercare di favorire al massimo lo scambio fra pari. Spesso è più efficace di quello costantemente centrato sull'insegnante.*
[52] *Siccome l'attività non è semplice, per favorire la trasparenza del ragionamento di Nicolò e Mustafa sarebbe opportuno chiedere loro cosa intendono con 'la prima delle nere'. Molti compagni potrebbero pensare alla 'prima perla nera della successione', e questo li porterebbe fuori strada. In realtà dietro la frase dei due alunni c'è un ragionamento – non esplicitato – costruito attorno alla divisione 9 : 2 = 4 con resto 1.*
[53] *Qui sarebbe necessario chiedere a Giulio come ha fatto a stabilire che la nona perla sta al 24° posto. Il ragionamento per individuare un particolare elemento del modulo è molto articolato e certamente la maggior parte della classe è lontana dall'aver capito come si fa (consiglio all'insegnante la lettura dell'Espansione 3: La posizione di una qualsiasi perla dell'Unità 7). Nicolò, Mustafa e Giulio hanno costruito un ragionamento che li ha portati a numerose operazioni collegate fra loro: (a) 9 : 2 = 4 con resto di 1 (quattro coppie di perle nere e la prima perla della quinta coppia – la famosa 'prima delle nere') ; (b) 5 × 4 = 20 (quattro moduli completi); (c) 20 + 3 + 1 (le perle dei quattro moduli completi + le tre bianche del quinto modulo + la prima nera della quinta coppia). Questi passaggi*

Lorenzo: Ma è giusta la soluzione di Giulio?
√: Non lo so se è giusto o meno ditemelo voi.
Giulio: Io ho contato dal disegno.
Enrico: Ho contato per 5: 5, 10, 15, 20, 25 e poi sono andato indietro di uno. Ogni 5 ne ho contato 2 nere
√: Possiamo scrivere l'operazione di Enrico?
Giulio: 5 × 5 - 1 = 24
Nicolò: Boh![54]
√: Proviamo a trovare la 15ª perla nera
Mustafa: È la prima perla nera[55]
√: Ma a che punto sta?
Marco: Al terzo o al quarto posto[56].
Zakaria: Al 34° posto[57]
Enrico: Sì è al 34° posto
√: Siete tutti d'accordo?
Lorenzo: Boh!
Enrico: No, no, è sbagliata[58]
Giulio: Sì, per me è al 34°
Lorenzo: Sì, sì è al 34° posto
√: E come avete fatto?[59]
Giulio: Ho contato. Ogni 5 ne ho contate 2 nere
Lorenzo: Ho contato per 5 e ogni volta ci sono 2 perle nere
√: Proviamo a scrivere un'operazione possibile.
Giulio: 5 × 7 - 1 fa trentaquattro.
Lorenzo: 5 × 7 e sono arrivato alla fine della sequenza[60] e poi siamo tornati indietro di uno.
√: Perché × 7?
Enrico: 5 × 7 = 35 -1 =34[61]
√: Ok! Ma come avete trovato il 7?[62]
Mustafa: Se faccio per 5 per arrivare al 34 devo fare per 7
Lorenzo: Faccio 13 : 5[63]

---

dovrebbero essere argomentati anche attraverso l'uso di più linguaggi: il naturale, l'iconico e il matematico. Chiedere se ci sono altre risposte cortocircuita l'esplicitazione del ragionamento.

[54] *Anche qui sarebbe interessante capire cosa intenda esprimere Nicolò – che è uno di quelli che sembra aver costruito un ragionamento corretto – con il suo 'Boh!'. Forse pensa di aver seguito una strada diversa?*

[55] *Stessa osservazione di prima: Mustafa dovrebbe essere invitato a spiegare come ha fatto.*

[56] *Bisognerebbe chiedere anche a Marco come ha fatto. Oltretutto c'è da chiarire il motivo della sua indecisione.*

[57] *Idem. Tutti questi interventi (Mustafa, Marco, Zakaria ed eventuali altri) vanno confrontati fra di loro, per creare un sapere condiviso, altrimenti ognuno va per la sua strada e probabilmente molti alunni rimangono esclusi dai benefici del ragionamento collettivo. Consiglierei di adottare una sorta di protocollo comune a questo tipo di discussioni: (1) ogni alunno elabora e propone alla classe la sua strategia, che conviene sia trascritta alla lavagna; (2) le strategie si confrontano collettivamente; (3) si scelgono una o più strategie corrette; (4) si passa alla situazione successiva, scelta opportunamente dall'insegnante sulla base di come sono andate le cose nei tre passaggi precedenti, per verificare e consolidare i saperi acquisiti o per aprire la via a nuove situazioni problematiche.*

[58] *Bisognerebbe chiedere ad Enrico perché la considera sbagliata.*

[59] *Bene. La domanda è molto opportuna. Suggerirei, in generale, di favorire prima l'argomentazione in linguaggio naturale e poi la sua traduzione in linguaggio matematico. Il contratto didattico dovrebbe chiarire che la trasparenza non è tanto importante per l'insegnante quanto per i compagni. Sono loro i veri beneficiari della correttezza nell'uso dei linguaggi, e della coerenza e della trasparenza delle argomentazioni.*

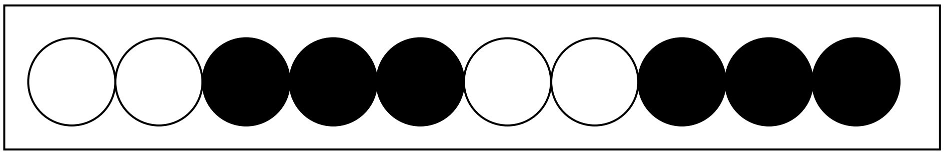
[60] *L'uso del concetto di 'fine della sequenza' è molto ambiguo; casomai si potrebbe dire 'la fine della parte disegnata (o 'visibile') della sequenza'.*

[61] *Se Enrico l'ha scritta in questo modo, la proposta è scorretta, perché $5 \times 7 \neq 35 - 1$. L'uso che Enrico fa dell'uguale è ancora una volta procedurale, e sarebbe necessario riflettere con la classe ogni volta che si presentano 'pseudo-uguaglianze' di questo tipo. La riflessione condurrebbe, attraverso la correzione di un errore molto grave, a superare il concetto dell'uguale come 'operatore direzionale' per affrontare quello* algebrico *di 'relazione di equivalenza'. Allo stesso tempo, la riflessione potrebbe aprire alla rappresentazione di ciò che dice Enrico nella forma corretta $5 \times 7 - 1 = 34$, che può essere anche letta come equivalenza fra due rappresentazioni (una non canonica e l'altra canonica) del numero 34.*

[62] *Penso che qui l'insegnante cerchi, molto correttamente, di condurre gli alunni alla 'scoperta' della divisione.*

[63] *Non capisco l'idea di Lorenzo (che Mustafa riprende subito dopo). Da dove salta fuori il 13? Forse hanno sbagliato e volevano dire 15?*

Mirco: No! Le perle nere sono 2 allora 13 : 2.
Mustafa: Ma fa 6 e un pezzo, cioè quasi 7.
Giulio: No, 5 per 6 arrivi al 30 e poi fai + 4
√: Perché + 4?
Lorenzo: Perché è la prima nera che è dopo 3 perle bianche.
√: Proviamo a trovare un modo più "matematico" di scrivere l'operazione. La prossima sequenza è 2 perle bianche e 3 nere[64]...



... Proviamo a trovare a che punto sta la 32° perla bianca.
Zakaria: 11° posto
Lorenzo: 10° posto, no, al 55° posto
Enrico: La perla bianca. Vero?
Mirco: Al 76° posto
√: Come avete fatto?
Giulio: 32 : 2 che fa 16 e sono quante coppie da 2 ci sono
Enrico: 16 per 3…
Giulio: No, devi fare per 5, perché le perle della sequenza sono 5
Mirco: No, per 3 perché le perle della sequenza sono 3
√: Proviamo a farle entrambe. Allora con quale cominciamo?
Mirco: 16 per 3 uguale 48, davanti ha 48 perle nere
Giulio: Forse è all'80° posto,
Mirco: Sì è 80!
Giulio:Perché 16 per 3 fa 48 e sono tutte le nere e poi ci metti tutte le 16 bianche e fa 80
Marco e Lorenzo: È vero
√: Proviamo a trascrivere tutto questo ragionamento con una operazione. Chi mi dice cosa devo scrivere?
Mirco: Prima c'è da fare 32 : 2 = 16 e sono le coppie di perle bianche
Giulio: Poi si fa 16 × 3 = 48 e troviamo le perle nere che stanno davanti a quelle bianche[65].
Lorenzo: E poi si trovano tutte e due insieme.
√: Prova a riformulare questa frase che non ha niente di matematico
Lorenzo: 16 + 48 = 80

32 : 2 = 16 16 × 3 = 48 16 + 48 = 80

√: Ora io ho tre operazioni diverse alla lavagna, ma vorrei darvi un suggerimento ricordandovi le espressioni che abbiamo fatto qualche tempo fa: come si possono mettere insieme diverse operazioni.
Lorenzo: Ah, già. Le parentesi.
Mirco: Allora è…
Giulio: Nella parentesi tonda metti prima una operazione e poi l'altra e poi in mezzo ci metti l'uguale per sommarle.
√: Provate a dettarmi quello che devo scrivere.
Alla lavagna scrivo quindi quello che dice Giulio:

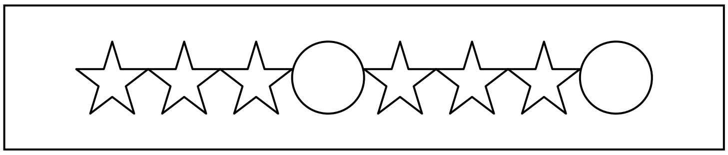
(32 : 2) + (16 × 3) = 80

---

[64] *Perché si è abbandonata l'esplorazione sulla 15ª perla senza giungere alla soluzione corretta (39)? Analogamente a come si è detto nel Commento 53, la strategia avrebbe dovuto condurre a questi passaggi: (a) 15 : 2 = 7 con resto di 1 (sette coppie di perle nere e la prima perla nera dell'ottava coppia; (b) 5 × 7 = 35 (sette moduli completi); (c) 35 + 3 + 1 = 39 (le perle dei sette moduli completi + le tre bianche dell'ottavo modulo + la prima nera dell'ottava coppia, come ha intuito Lorenzo).*

[65] *Giulio commette l'errore di 'vedere' le perle nere davanti a quelle bianche; in realtà stanno dopo. Quindi quando moltiplica 16 per 5 e trova 80, trova il numero delle perle di 16 moduli completi, dall'ultimo dei quali deve togliere tre perle nere. La 32ª perla bianca non è quindi l'80ª ma la 77ª.*

Andrea: Io non ho capito
√: Chi spiega ad Andrea?
Mirco: Dal 32 che sono tutte le perle bianche divido per 2 perché trovo quante coppie di bianche ci sono, poi so che tra ogni coppia di bianche ce ne sono 3 nere…
Giulio: Sì poi faccio per 3 perché ci sono 3 perle nere ogni volta che c'è una coppia di bianche, così trovo tutte le perle nere…
Lorenzo: E così tutte quelle bianche e tutte quelle nere fanno 80 che è l'ultima perla bianca.
√: Andrea ti sembra di aver capito?
Andrea: Sì, sì un po'!
√: Ma prima avevo lasciato sospeso una questione se fare per 3 come diceva Mirco o per 5 come diceva Giulio. Riprendiamo la cosa da qui. Giulio perchè tu dicevi di moltiplicare il 16 per 5?
Giulio: Sì se faccio 16 × 5 = 80[66]
Lorenzo: Ma arriviamo alle stesso numero più presto.
Mirco: Ah, così trovi tutte le perle, sia quelle bianche che quelle nere in un solo colpo, senza fare la somma dopo.
Enrico: Ma così io posso dire che su 100 perle 60 sono nere e 40 sono bianche.
√: È un'osservazione corretta anche questa. Provo a proporre un'altra sequenza perché poi voglio vedere se riusciamo a scrivere una regola valida per tutti i casi. Facciamo 3 stelline e una pallina:



√: Dove sta la 7ª pallina?
Enrico: Al 7° posto.
Giulio: La settima pallina?
Nicolò: Al 17° posto.
Mirco: Ogni 3 ce n'è 1.
Luca: Al 28° posto.
Nicolò: In ogni 8 ce ne sono 2.[67]
Lorenzo: Ogni 4 ce n'è 1.
Giulio: Allora 7 × 4 = 28.
√: Perché 7 × 4? Da dove avete preso il 7 e il 4?[68]
Giulio: 7 è il posto della 7ª pallina e 4 sono le stelline + la pallina[69].
√: Come avevamo chiamato "lo stampino" che si ripete?
Giulio: Sì, la sequenza.[70]
√: Proviamo a trovare allora dove sta la 20ª pallina
Enrico: All'80°, perché 20 × 4 = 80.
Nicolò: Sì, perché si fa la conta del 4 finché arrivi a venti.
Andrea: Ce n'è sempre una ogni 4 e allora 20 × 4 = 80
Mirco: Adesso è facile. È sempre così![71]
√: Bene, vuol dire che abbiamo capito la regola[72]. Cerchiamo la 20ª stellina.
Andrea: 80° posto

---

[66] *Purtroppo Giulio continua a trainare il ragionamento nella direzione sbagliata. Avrebbe ragione se nel modulo le perle bianche e quelle nere fossero invertite, in modo che le due bianche siano alla sua fine e non all'inizio.*
[67] *Nicolò si lascia fuorviare dagli otto disegni che compongono il disegno.*
[68] *Sarebbe stato importante che l'insegnante intervenisse anche sulle osservazioni precedenti: Enrico (perché al 7° posto?), Nicolò (perché al 17°?), Luca (perché al 28?), Nicolò (quell''ogni 8 ce ne sono 2' fa capire che per lui la successione non è infinita, ma solo quella visibile).*
[69] *L'idea di modulo rimane opaca; gli elementi che lo compongono sono visti come cose a sé.*
[70] *Ho l'impressione che Giulio goda di un 'eccesso di credibilità'. Più di una volta è intervenuto portando fuori strada la classe. Vorrei sottolineare inoltre un altro aspetto che condiziona il retroterra concettuale di tutta l'attività. L'insegnante chiede un altro nome per lo 'stampino' e Giulio precisa 'sequenza'. Ho provato a vedere com'è stato usato il termine 'sequenza' nei tre diari: 13 volte indica* il modulo *e 13* il fregio*. Cioè viene usato indifferentemente per indicare* la parte e il tutto*. Sarebbe opportuno che l'insegnante ritornasse anche su questo aspetto per chiarire la differenza tra* fregio, modulo, elemento.
[71] *Ahi ahi... è la conseguenza banalizzante di quanto è accaduto sinora. La situazione in realtà è molto più ricca da esplorare, perché la classe non ha riflettuto su quello che è il vero protagonista dell'attività, e cioè* il resto.
[72] *Quale 'regola'?*

Nicolò: 80° posto[73]
Lorenzo: Cos'era?
√: Dobbiamo cercare la 20ª stellina
Enrico: Stellina o pallina?
√: Stellina questa volta.
Nicolò: Non cambia 4 × 20 = 80
Giulio: 24° posto
Andrea: Sì, giusto
Celeste: 80° posto
Lorenzo: È la seconda stellina della sequenza
Enrico: Al 26°
Giulio: 3 × 6
Enrico: Ma perché 3 × 6?
Mirco: No, 3 × 7
Lorenzo: Facciamo una divisione
Giulio: 3 × 6
Andrea: Io provo il disegno.
Giulio: 26 : 4
Lorenzo: Diviso 6
Giulio: Eh no, diviso 4, perché la sequenza è da 4
Ilaria: 20 : 4 e trovo quante sono le sequenze; così sono 5 sequenze.
Mustafa: No, ci sono tre stelline alla volta
Lorenzo: Ah, ho capito, fai 6 × 8 e poi fai meno le palline
√: E dove hai trovato il 6 e l'8?[74]

---

[73] *Andrea e Nicolò applicano la 'regola' senza riflettere.*

[74] *L'insegnante interviene sull'ultimo intervento di Lorenzo, ma prima di questo c'è un interessante scambio che coinvolge un elevato numero di alunni (18 interventi) che si sarebbe prestato a numerose altre richieste di chiarimento. Provo ad analizzare la sequenza che va da Nicolò a Lorenzo.*
Nicolò *applica in modo meccanico la regola trovata in precedenza;*
Giulio *esprime solo il* prodotto *del suo processo mentale, che quindi è* opaco *di significati: come ha trovato 24? Moltiplicando per 6 il numero degli elementi (4) del modulo? Moltiplicando per 8 il numero delle stelline di un modulo?*
Andrea *si accoda a Giulio,* ***Celeste*** *a Nicolò;*
Lorenzo *presenta anch'egli il prodotto del ragionamento, ma lascia intravedere un'idea corretta: potrebbe aver diviso 20 per 3 (numero stelline di un modulo) e trovato 6 (moduli) con <u>resto 2</u>, che ha interpretato come 'seconda stellina della [settima] sequenza'.*
Enrico *completa il ragionamento di Lorenzo: (a) 20 : 3 = 6 con resto di 2 (sei terne di stelline, il resto dà la seconda stellina della settima coppia); (b) 4 × 6 = 24 (sei moduli completi); (c) 24 + 2 = 26 (le stelline dei sei moduli completi + le due del settimo modulo);*
Giulio *non coglie il senso degli interventi di Lorenzo ed Enrico e propone, senza motivarla, un'operazione che avvicina al 20 iniziale;*
Enrico *che, come abbiamo visto, ha capito come si risolve la situazione (ma rimane inascoltato), chiede spiegazioni a Giulio;*
Mirco *segue la strada di Giulio, e trova il prodotto che si avvicina a 20 per eccesso;*
Lorenzo *esplicita in forma ancora troppo opaca il processo che ha seguito per individuare la seconda stellina e suggerisce la divisione;*
Giulio *ribadisce la sua operazione;*
Andrea *cerca (in modo del tutto legittimo, favorito dai piccoli numeri) l'aiuto nella rappresentazione iconica;*
Giulio *modifica la sua strategia e, senza capirle bene, cerca di mettere assieme le proposte di Enrico (26) e di Lorenzo (dividere);*
Lorenzo *si confonde con i suoi calcoli (mentali o scritti) e propone scorrettamente il divisore 6 al posto di 3;*
Giulio *capisce che il 6 è sbagliato ma sbaglia a sua volta, proponendo come divisore il numero degli elementi del modulo(4) anziché quello delle stelline di un modulo (3);*
Ilaria *concretizza istintivamente l'idea di Giulio e trova quel 5 che non c'entra con il problema;*
Mustafa *riconduce la proposta della divisione sulla retta via (il numero delle stelline di un modulo);*
Lorenzo*, nel groviglio di proposte, perde il filo del suo ragionamento (corretto) e si lascia portare fuori strada (com'è accaduto in precedenza a Nicolò – Commento 67) dal numero dei disegni (8);*
Enrico *ribadisce la sua soluzione sbagliando il risultato;*
Marco *concretizza senza riflettere il calcolo proposto da Lorenzo e trova 48.*

Enrico: È al 25° posto
Marco: Per me è al 48° posto.
√: Con l'esercizio di prima abbiamo fatto un ragionamento per cui tutti avete detto "ho capito" oppure "adesso è facile"; proviamo ad aiutarci ripetendolo. Abbiamo visto che le perline bianche in ogni sequenza erano 2 e abbiamo diviso il numero a cui volevamo arrivare per 2 per trovare il numero delle coppie presenti.
Lorenzo: È vero; allora 20 : 3 che fa…
Nicolò: Fa quasi 7, se fosse 21.
Lorenzo: Fa 6 con 2 di resto
√: Cosa abbiamo trovato così?
Giulio: Le sequenze, quante sequenze ci sono.
Luca: Per ogni sequenza c'è 1 pallina, le sequenze sono 6 e allora ci sono 6 palline[75].
Nicolò: E allora si fa 20 + 6 = 26.[76]
Giulio: Era giusto allora 26.
Enrico: L'avevo detto io.
√: Va bene: anche per oggi abbiamo finito la nostra lezione.
.[77]

---

[75] *Luca ha perso il controllo semantico sull'esplorazione. Si stava cercando la 20ª stellina, e lui ha tirato fuori la 20ª pallina.*
[76] *Nicolò aumenta la confusione, perché sembra che sommi 20 stelline a 6 palline, traendo in inganno Giulio (che non aveva capito) ed Enrico (che in precedenza aveva trovato 26 in modo corretto).*
[77] *Alcune considerazioni conclusive alla fine dei tre diari (per gli approfondimenti si rimanda all'Unità 7 già citata):*

1. *L'attività è molto ricca ma altrettanto articolata dal punto di vista matematico. Sul piano didattico, richiede all'insegnante una buona conoscenza dell'argomento e numerosi esercizi preparatori che lo aiutino a prendere confidenza con le situazioni da esplorare, e quindi a dirigere le discussioni e il confronto fra le varie ipotesi.*
2. *Bisogna chiarire fin dall'inizio i termini in uso e il loro significato: fregio (se si preferisce 'sequenza'), modulo, elemento. Il fregio deve avere un inizio convenuto ed è infinito; quella visibile è solo una sua porzione del tutto arbitraria. Dal punto di vista della rappresentazione è opportuno che il disegno del fregio sia formato da un numero elevato di elementi, che si concluda con un modulo interrotto e che il suo proseguimento all'infinito sia reso, per esempio, mediante una piccola freccia. Va concordato con la classe che il modulo è la parte minima che si ripete; per esempio, in un disegno avente la struttura ABBCABBCABBCABBCAB... il modulo è ABBC, escludendo così che qualcuno possa pensare che tutta la stringa sia un modulo.*
3. *Dal punto di vista matematico, è molto comune che la prima strategia proposta dagli alunni per trovare un determinato elemento del fregio, soprattutto se i primi numeri che l'insegnante propone sono piccoli, si colleghi ai multipli del numero degli elementi del modulo (ad es: Marco a pag.3 "3 per 11 arrivo al 33 più 2 fa 35"). Il passo successivo si manifesta attraverso la divisione (ad es. Giulio a pag.6: "Conto quante volte ci sta dentro il 6 fino al numero più vicino al 92"). Quello che bisogna valorizzare a questo punto è il ruolo del resto, compreso fra 0 e il numero degli elementi del modulo meno 1; i ragazzi devono capire che ad ogni resto corrisponde un diverso elemento del modulo. L'esplorazione diventa ancora più articolata se si richiede un elemento ben caratterizzato, ad esempio 'la 67 perla gialla'.*
4. *Il passaggio alla generalizzazione è un punto molto delicato, e succede spesso che gli insegnanti lo affrontino 'sostituendo' i numeri con delle lettere. È troppo lungo scriverci su ora. Consiglio la lettura di 'Lettera' dal Glossario.*
5. *Quando la classe è alla ricerca del modo di rappresentare un certo processo, è opportuno attivare una strategia che consenta il confronto quanto più trasparente possibile fra le varie proposte. Gli alunni devono abituarsi a confrontarsi, ad interpretare, a modificare le proprie ipotesi, a giustificare le scelte, ad argomentare, a capire che non ci sono soluzioni magiche o scorciatoie di comodo (penso all'intervento di Mirco a pagina 15 "Adesso è facile. È sempre così!".*
6. *Si suggerisce di rivisitare con la classe certi nodi dell'attività.*