percorsi nell'aritmetica per favorire il pensiero prealgebrico progetto ArAl	2021/22	**Rappresentare problemi** (da problemi standard a non standard)	**1**

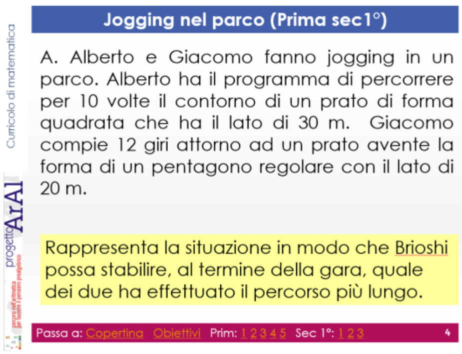
Monteroni d'Arbia (SI)	*I*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	***1***	*2*	*3*	***Marialuisa Pandolfi*** *(1^parte)*
Monteroni d'Arbia (SI)	*I*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	***1***	*2*	*3*	***Alfonso Riva-Marialuisa Pandolfi*** *(2^parte)*

Commenti Insegnante di classe
Commenti Giancarlo Navarra
Commenti Anna Traverso (AT), Maria Grazia Della Picca (MDP)

PRESENTAZIONE DELLA CLASSE
La classe prima sez. C è costituita da 26 alunni: la classe è eterogenea sono presenti diversi livelli di apprendimento e un alunno con disabilità che, proprio per le sue caratteristiche, segue pochissimo le attività della classe.
Alcuni alunni mostrano difficoltà nei processi logici e tempi di concentrazione e di attenzione non sempre adeguati, un buon gruppo di alunni si mostra sensibile e molto partecipativo alle sollecitazioni didattiche.
Obiettivo di questo anno è quello di aiutare i ragazzi a modificare e/o completare il loro approccio alle situazioni problematiche: da problemi verbali standard (quindi con impostazione procedurale) a problemi non standard (con un'impostazione relazionale).
Nella prima parte dell'anno i ragazzi hanno lavorato sul linguaggio come suggerito dall'Unità 1 "Brioshi e l'approccio al codice algebrico".

PRESENTAZIONE DELL'ATTIVITÀ:
L'insegnante ha proposto alcune situazioni problematiche a tutto il gruppo classe nell'ora curricolare e con cadenza settimanale. Nei mesi precedenti gli alunni hanno avuto già un primo approccio con il linguaggio e successivamente con alcune situazioni problematiche tratte dal loro libro di testo "Contaci!" di Bertinetto, Metianen, Paasonen, Voutilainen che permettevano di analizzare il problema da un punto di vista relazionale.

Si proietta sullo schermo interattivo la seguente diapositiva in modo tale da leggere il testo della situazione problematica:



1. *L'insegnante chiede se il testo è chiaro e se ognuno di loro conosce bene il significato dei termini usati.*
2. *Alunni rileggono e poi rispondono che non hanno problemi ed hanno capito.*
3. I: Invito gli alunni a chiarire il significato di forma quadrata e di pentagono[1].
4. Irene: Forma quadrata si riferisce ad una figura geometrica… il quadrato che ha tutti i lati uguali e il pentagono invece ha cinque lati.
5. I: Magari specifichiamo che anche il pentagono è una figura geometrica che presenta cinque lati. È presente poi l'aggettivo regolare, conoscete il suo significato?
6. Camilla: Vuol dire che ha tutti i lati uguali e anche tutti gli angoli uguali.
7. I: Chi ha tutti i lati uguali e gli angoli uguali?
8. Camilla: Il pentagono.

[1] *Premetto che con i ragazzi non ho lavorato approfonditamente sulle principali figure geometriche euclidee, per ora con loro sono ferma al semplice riconoscimento, nomenclatura e alle principali caratteristiche specifiche di triangoli e quadrilateri.*

Monteroni d'Arbia (SI)	*I*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	***1***	*2*	*3*	***Marialuisa Pandolfi*** *(1^parte)*
Monteroni d'Arbia (SI)	*I*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	***1***	*2*	*3*	***Alfonso Riva-Marialuisa Pandolfi*** *(2^parte)*

9. I: Camilla, componi una frase completa [2].
10. Camilla: Il pentagono regolare è una figura che è formata da cinque lati uguali e cinque angoli uguali.
11. Merlin: Anche il quadrato è una figura regolare!
12. I: Benissimo, allora generalizzate il concetto di figura regolare.[3]
13. Merlin: Una figura è regolare se ha i lati tutti uguali e gli angoli uguali, quindi il quadrato è regolare.
14. I: È sufficiente per questa situazione e per andare avanti, ci basta sapere questo. Adesso lavorate sul testo evidenziando in colore gli enti e le relazioni così come avete già fatto con qualche altro problema nei giorni scorsi e quando è venuto il professor Navarra.
15. Alessia: Ho sottolineato 10 volte, 30 m, 12 giri, 20 m.
16. I: C'è qualcun altro che ha evidenziato qualche altro ente? [4] Se ce ne sono in più rispetto a quelli detti da Alessia.
17. Mattia: Ho scritto anche "quale dei due ha effettuato il percorso più lungo".
18. I: Spiegati meglio.
19. Mattia: Insomma ho messo negli enti la richiesta del problema[5].
20. I: Tutti d'accordo con Mattia?
21. Alunni: Mh…
22. I: Leggete di nuovo la consegna del problema.
23. Alessia: "Chi tra Alberto e Giacomo ha effettuato il percorso più lungo"?[6]
24. I: Siete convinti di ciò che afferma Alessia?
25. *Silenzio.*
26. I: Allora proviamo a smontare la richiesta in frasi di senso definito, aiutatevi indicando il soggetto di ogni frase.
27. Mattia: Alberto e Giacomo che compiono i due percorsi[7].
28. I: Questa è una frase e giustamente Alberto e Giacomo sono il soggetto, però vedo altre parole!
29. Irene: Brioshi… che deve stabilire chi dei due fa il percorso più lungo.
30. I: Ok, va bene così?

---

[2] *L'invito dell'insegnante è correttissimo. Sarà importante condividere con la classe un contratto didattico che ponga al centro la costruzione consapevole di frasi complete superando così, poco alla volta, la dipendenza dall'invito da parte dell'adulto a farlo.*

[3] *Azzardo questa richiesta.*

[4] *Errore notevole: con la mia domanda già suggerisco la risposta. Faccio una proposta riferendomi alla frase di Alessia (15). L'alunna elenca i quattro dati 'visibili'. Credo che sarebbe il caso di guidare lei e i compagni a riflettere sul fatto che in una situazione problematica ci possono essere dati sia* espliciti *(come quelli che lei ha evidenziato) che* impliciti, *e che bisogna comportarsi come dei 'buoni investigatori' che non si fermano agli 'indizi' più evidenti. Il punto è: come far capire che 'forma quadrata' e 'forma di pentagono regolare' sono 'indizi'? Mi viene in mente che, per creare questa sensibilità si potrebbero proporre questioni costruite ad hoc in cui l'indizio da interpretare, e da tradurre in linguaggio matematico come ente, contenga un numero nascosto ma riconoscibile. La consegna potrebbe essere 'Individua e descrivi gli enti in queste frasi'. Faccio alcuni esempi:*
(a) In gennaio Ruggero è riuscito a mettere da parte 4 euro al giorno (enti: 31 → numero dei giorni di gennaio, 4 → euro messi da parte ogni giorno).
(b) Da lunedì a venerdì salgono ogni giorno sullo scuolabus 18 alunni.
(c) Un giardino esagonale ha 4 panchine su ogni lato.

[5] *Qui iniziamo per competenze diverse, un percorso periglioso per entrambi, io perché non saprò gestirlo bene, lui perché fermo nella "stanza procedurale", per usare le parole del prof. Navarra. Gli interventi di Mattia che seguiranno metteranno nero su bianco che da una parte lui non ha ben chiara la differenza tra rappresentare e risolvere e che io non so aiutarlo a "traghettare nella stanza relazionale".*

[6] *Alessia ribadisce il concetto di Mattia e io non uso strumenti diversi da quelli usati con Mattia per aiutarla. Il punto è, credo, che agli alunni non è chiaro che stanno parlando di* numeri. *Alessia (15) dice:* "Ho sottolineato 10 volte, 30 m, 12 giri, 20 m". *Ho l'impressione che lei veda entità generiche, e diverse fra loro, come 'volte', 'giri', 'metri', e non veda numeri, anche perché mantiene le marche. Sarebbe opportuno chiedere di esplicitare gli enti in quanto tali; per esempio (penso a quello che avviene di solito): non un superficiale '10 → volte', ma attraverso frasi complete come:*
10 → numero delle volte che Alberto percorre il contorno del prato di forma quadrata
30→ lunghezza del lato del prato quadrato
12→ numero delle volte che Giacomo percorre il contorno del prato di forma pentagonale
20→ lunghezza del lato del prato pentagonale.
In questo modo Mattia (19), forse, avrebbe potuto capire che la richiesta del problema non è un 'ente', ma fa riferimento ad un confronto tra due rappresentazioni.

[7] *Altra dimostrazione dello stallo di Mattia, non riesco a fargli leggere altro nella richiesta del problema. È ancorato lì. Confesso che comincio a perdermi.*

31. *Silenzio.*
32. Dalia: "Rappresenta" è un'altra frase e chi deve rappresentare sono io.
33. I: Allora adesso sbrogliate questo "intoppo".
34. *Silenzio…*
35. *I:* Scusatemi, ma avete trovato una prima frase che dice che ognuno di voi deve rappresentare il problema, una seconda frase che dice Brioshi deve essere messo in grado di stabilire quali dei due amici fa il percorso più lungo e una terza frase che chiede fra Alberto e Giacomo chi fa il percorso più lungo. Quale fra queste tre è la frase principale, la più importante?[8]
36. Merlin: Rappresenta la situazione.
37. *Pausa di riflessione.*[9]
38. I: Quindi… tra gli enti ci dovrei mettere "rappresenta il problema". E secondo voi la richiesta di Mattia "Quale dei due ha effettuato il percorso più lungo" dove vi sta spingendo?[10] Rispondeva alla richiesta principale del quesito?
39. Mattia: Più o meno[11].
40. Alessia: Noi si deve rappresentare e Brioshi risolvere.[12]
41. I: Quindi…[13]
    Silenzio
42. Brando: Io ho messo anche pentagono e quadrato.[14]
43. Caterina: Ho sottolineato Alberto e Giacomo[15].
44. Mattia: Anche se non c'è scritto nel problema ho sottolineato numero percorso di Giacomo e numero percorso di Alberto, cioè ciò che dobbiamo scoprire.
45. I: Ma per numero percorso cosa intendi?
46. Merlin: … numero di metri fatti da Giacomo o da Alberto.
47. Mattia: I metri percorsi da Giacomo o da Alberto.
48. I: Ok, ma attento alla richiesta: devi rappresentare o risolvere?
49. Alunni: Rappresentare[16].
50. I: Poi vorrei che mi spiegaste perché tra gli enti avete messo pentagono e quadrato o forma quadrata.
51. Tommaso: Perché pentagono significa cinque lati e quadrato quattro lati, quindi si possono considerare tra gli enti e poi il pentagono ha cinque lati uguali perché è regolare.
52. Alessia: Quindi questa informazione è implicita perché si deve ricavare dal quadrato e dalla forma del pentagono.

---

[8] *Non saprei come rispondere. Mi sembra che il nodo continui ad essere l'individuazione dei numeri ancora 'opachi' 4 e 5. (AT) Vi è anche un altro aspetto, secondo me. L'insegnante, nell'analizzare la consegna di lavoro, la segmenta in tre momenti distinti e questo mi pare complichi le cose. Andrebbe chiarito invece che rappresentare la situazione e mettere in grado Brioshi, o qualsiasi altro interlocutore, di comprenderla e risolverla, fa parte di un'unica azione: la 'traduzione in linguaggio matematico' della situazione. Penso che il nodo, 'l'intoppo' da sbrogliare, stia proprio qui, nel chiarire il senso dell'espressione 'rappresenta la situazione' ricorrendo al concetto di 'traduzione'. Ripercorrendo le fasi di lavoro, dovrebbe emergere in prima istanza la necessità di individuare e nominare gli enti del problema (compresi quelli nascosti, come in effetti avviene), in secondo luogo di trovare le relazioni tra essi e di tradurle in linguaggio matematico nel modo più 'trasparente' possibile; si dovrebbe infine rilevare come, in questo caso, non vi siano enti sconosciuti e quindi il compito di Brioshi consiste nel mettere a confronto due diverse traduzioni e stabilire se tre esse vi sia o meno un rapporto di equivalenza.*

[9] *Sono riuscita a trattenermi.*

[10] *Domanda azzardata ma non riuscivo a tirarmi fuori da questo impasse. L'impasse è dovuto al fatto che l'attenzione è concentrata sull'organizzazione della consegna invece che sull'individuazione degli enti e sulla loro rappresentazione (cosa che, comunque, inizierà fra poco (44)) da aggiungere ai precedenti del mio Commento 6:*
4→ numero dei lati del prato di forma quadrata
5→ numero dei lati del prato di forma pentagonale.

[11] *Altra dimostrazione che non sono riuscita a far muovere Mattia di un passo.*

[12] *(AT) L'intervento di Alessia mi sembra importante. Conclude la sequenza aperta da Mattia (19) riguardo 'la richiesta del problema' e sottolinea che la consegna di lavoro contiene una doppia richiesta: una, rivolta agli alunni, di 'rappresentare la situazione' e un'altra, rivolta a Brioshi, di stabilire quale dei due amici abbia compiuto il percorso più lungo.*

[13] *Dovevo approfondire e chiarire di più con loro ma mi sono trovata impreparata.*

[14] *Brando apre la strada ai due numeri 'nascosti' 4 e 5.*

[15] *Mi sono dimenticata nel prosieguo di commentare questo intervento.*

[16] *Non è che così convinco Mattia.*

53. Brando: Io li ho messi perché sia Alberto che Giacomo non percorrono un solo lato della figura ma fanno un giro intorno alla forma geometrica.
54. I: Come potremmo dirlo meglio "il giro intorno a tutta la figura"?
55. Brando: È il perimetro.
56. Merlin: Con il perimetro possiamo sapere quanti metri ha percorso Alberto e quanti Giacomo con un giro.
57. I: Riflettete bene, il perimetro rappresenta un ente o una relazione?
58. Irene: Secondo me una relazione, perché tiene collegati il numero di lati della figura con la lunghezza del lato.
59. Alessia: Ci si deve ricordare anche 12 giri e 10 volte.[17]
60. I: Ok, scriviamo sulla lim gli enti con le loro specifiche e le relazioni:[18]
    La discussione porta a specificare questi enti alla lavagna:
    a. *10 numero di giri fatti da Alberto*
    b. *30 m misura del lato del quadrato*
    c. *12 numero di giri fatti da Giacomo*
    d. *20 m misura del lato del quadrato*
    e. *forma pentagonale*
    f. *forma quadrata*
    g. *richiesta: descrivi la situazione*

    e queste le relazioni:
    a. *perimetro del quadrato*: $l\times4$
    b. *perimetro del pentagono*: $l\times5$.
61. I.: C'è qualcun altro che ha trovato relazioni diverse da quelle alla lavagna?
62. Mattia: Io ho messo g= numero metri del percorso di Giacomo e a= numero metri del percorso di Alberto.
63. Brando: Io ho scritto uguale.
64. I: Visto che non avete da aggiungere altro, vi chiederei di discutere l'intervento ultimo di Mattia in un secondo momento. Adesso vediamo le vostre rappresentazioni. Chi vuol venire alla lim per scrivere e spiegare ciò che ha fatto?
65. Merlin: Prima di tutto ho fatto il disegnino del quadrato e del pentagono poi ho specificato con una lettera a Alberto e con la g Giacomo[19]. Alberto fa 10 volte il quadrato invece Giacomo fa 12 volte il pentagono.
66. I: Che vuoi dire con l'espressione 10 volte il quadrato invece Giacomo fa 12 volte il pentagono?
67. Merlin: No! volevo dire che Alberto fa 10 giri sul perimetro del quadrato.
68. Alessia: Si può dire il percorso fatto da Alberto! Il percorso che fa Alberto è uguale al perimetro per 10. Insomma a è il numero di metri del percorso di Alberto.[20]
69. Merlin: Poi sapendo che il quadrato ha 4 lati si fa 30,[21] la misura del lato del quadrato, per il numero di giri; invece il perimetro del pentagono è uguale a 20 per 5 che sono i lati del pentagono. Poi il pentagono lo moltiplico per 12 e il quadrato per 10.
70. I: Cosa vuoi dire che moltiplichi per 12 il pentagono? Hai 12 pentagoni in fila?

---

[17] *(AT) Trovo esemplare la sequenza 50-59. Gli interventi dell'insegnante sono puntuali, ma non incalzanti. Tra gli alunni si sviluppa un dialogo, breve ed efficace, in cui ciascuno si aggancia all'intervento del compagno che lo ha preceduto (es. Alessia, 52: 'Quindi questa informazione è implicita'), sa giustificare le proprie scelte (Brando, 53: 'Io li ho messi perché sia Alberto che Giacomo non percorrono un solo lato della figura ma fanno un giro intorno alla forma geometrica'), sa rispondere con chiarezza alle domande dell'insegnante (es. Irene, 58: 'Secondo me (il perimetro è) una relazione, perché tiene collegati il numero di lati della figura con la lunghezza del lato'). È un microepisodio, ma è un indizio importante, segno che il lavoro fatto comincia a produrre i suoi frutti. Concordo.*

[18] *Mi sembra che l'elenco rischi di non focalizzare l'attenzione sugli enti (cioè sui numeri) in quanto 'forma pentagonale e 'forma quadrata' fanno pensare alle figure, e penso che rimangano opacizzati i numeri dei lati, rispettivamente 4 e 5. Non capisco l'inserimento negli 'enti' della 'richiesta' (g). Non mi è chiara la rappresentazione dei due perimetri (a) e (b), e non capisco come potrà essere utilizzata nelle rappresentazioni dei percorsi.*

[19] *La proposta di Merlin andrebbe chiarita e messa in discussione. Cosa intende l'alunno con 'a' che 'specifica' Alberto e 'g' che 'specifica' Giacomo? In che senso 'specifica'? È necessario che la classe conquisti la chiarezza del significato della lettera, che 'sta per' un numero, non per un nome o una persona.*

[20] *Qui sarebbe necessario porre gli alunni di fronte al fatto che Merlin (65) e Alessia (68) attribuiscono alle lettere significati diversi. Più avanti (73) questa misconcezione viene addirittura fissata alla lavagna.*

[21] *Anche Merlin è sempre legato alla "stanza procedurale", tutta l'affermazione che segue lo dimostra. Certo, si perde la direzione di marcia che ritengo debba essere: (i) individuare i sei enti, noti o sconosciuti che siano; (ii) costruire le due rappresentazioni che li collegano e inviarle a Brioshi; (iii) mettersi nei panni di Brioshi, confrontare le due rappresentazioni e trarre la conclusione.*

71. Merlin: No! Intendo il perimetro che viene ripetuto 12 volte.
72. I: Meglio, continua.
73. *Sulla lavagna Merlin scrive:*[22]

:  quadrato :  pentagono

:  perimetro del quadrato  : perimetro del pentagono

A= Alberto G= Giacomo, anzi A= m percorsi da Alberto G= m percorsi da Giacomo

A= m  ×10

G= m  ×12

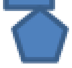
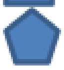
30×4=   ×10=m di A

20 x 5=   ×12= m di G

68. I: Hai da aggiungere altro?
69. Merlin: No.
70. I: Quindi cosa invieresti a Brioshi?
71. Merlin: Manderei questo:

:  perimetro del quadrato  : perimetro del pentagono

30×4=   ×10=m di A

21 ×5=   ×12= m di G

72. Mattia: Io gli invierei solo:

:  perimetro del quadrato  : perimetro del pentagono

 ×10=m di A

 ×12= m di G

73. I: Scusate, ma siete sicuri che Brioshi sia in grado di capire queste scritte e cosa fare? Sapete che i giapponesi non hanno lettere ma pittogrammi, loro però condividono con il resto del mondo le cifre che compongono i numeri e i segni delle operazioni.[23]
74. Merlin: E' sì… allora dobbiamo togliere le lettere altrimenti capisce a metà.
75. Tommaso: Io invierei questo:
    (30×4)×10
    (20×5)×12

---

[22] *Mi chiedo che significato attribuiscano gli alunni alle icone: rappresentano figure geometriche (un quadrato e un pentagono, come Merlin scrive nella prima riga), o numeri (i loro perimetri, come Merlin scrive nella seconda)? Gli alunni, come osserva l'insegnante (70) risolvono il problema perché non capiscono ancora cosa significhi 'rappresentare la situazione (in linguaggio matematico)'. Un'ulteriore manifestazione di questo aspetto è che nelle scritture che inviano a Brioshi scrivono 'm di A', inserendo un 'di' che Brioshi non può capire.*

[23] *(AT) L'intervento dell'insegnante mi sembra molto opportuno. Anche qui il ricorso al concetto di 'traduzione in linguaggio matematico' potrebbe aiutare. Una buona traduzione deve essere comunicabile, cioè deve essere compresa, senza dare origine a fraintendimenti, anche da chi è estraneo al contesto. La questione che si pone allora è questa: può, l'immagine di un quadrato o di un pentagono essere immediatamente riconducibile al perimetro della figura? Mi sembra che Tommaso (75) pur non arrivando ad una rappresentazione del confronto tra la lunghezza dei due percorsi, abbia colto il punto.*

Monteroni d'Arbia (SI)	*I*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	***1***	*2*	*3*	***Marialuisa Pandolfi*** *(1^parte)*
Monteroni d'Arbia (SI)	*I*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	***1***	*2*	*3*	***Alfonso Riva-Marialuisa Pandolfi*** *(2^parte)*

76. Brando: io ho completato così
A= m percorsi da Alberto
G= m percorsi da Giacomo
A= 10×(30×4) G= 12×(20×5)
77. I: Allora ragazzi confrontiamo le tre scritture[24].
78. Alessia: La rappresentazione di Merlin presenta troppe lettere che Brioshi non può capire[25], Tommaso non ha specificato qual è il percorso fatto da Giacomo e qual è quello di Alberto; e Brando di nuovo usa le lettere A e G.
79. Brando: Ma lui può leggere che A è=10×(30×4) anche se non capisce cosa è A.
80. I: Allora come potremmo rimuovere questo ostacolo?
81. Brando: Potremmo mandare A≥G? G≥A? A=G? cioè se i metri percorsi da Alberto sono maggiori dei metri percorsi da Giacomo, se sono minori o uguali.
82. I: Brando, ripensa alla osservazione che ti ha fatto Alessia sull'uso di A e G e cosa le hai risposto.

Termina la lezione[26] e quasi tutti hanno rappresentato e calcolato i metri del percorso fatto da Giacomo e del percorso fatto da Alberto.

Lascio i ragazzi dicendo loro di leggere con attenzione la diapositiva con la situazione problematica di tipo B, di scrivere gli enti e le relazioni contenute e di produrre una loro rappresentazione per l'incontro prossimo che si terrà in via telematica con gli alunni della classe prima di Murlo.

---

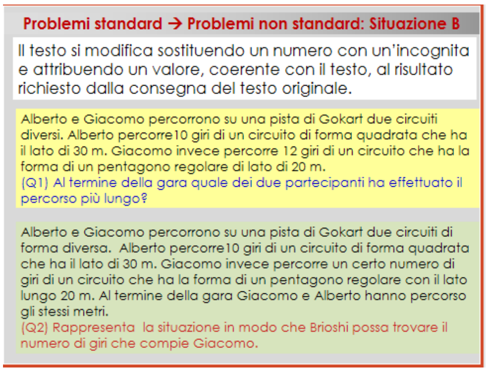
[24] *Non riesco a chiudere e a far capire loro che Brioshi ha bisogno di una uguaglianza e solo così lui può essere il solutore del quesito. Brando ci arriva vicino ma la sua proposta non è immediata, ha sempre bisogno di una sostituzione.*

[25] *Importante l'osservazione di Alessia. Sarebbe opportuno condividerla per verificare se i compagni la comprendono. Anche il successivo intervento di Brando (79) andrebbe ripreso in modo da rendere trasparente il significato che attribuisce alle lettere A e G. Ritengo, ma bisognerebbe verificarlo, che per lui le lettere rappresentino i risultati delle due espressioni che risolvono il problema. Ha ragione l'insegnante, che nel suo commento successivo esprime la convinzione che l'alunno non veda un confronto tra rappresentazioni non canoniche. Se questo, com'è probabile, è vero, si possono ricavare delle linee guida per il futuro, in modo da rinforzare le competenze degli alunni nella maturazione del balbettio algebrico.*

[26] *È evidente che molti di loro sono arrivati a porre A=G ma nessuno di loro ha proposto di sua iniziativa: 10×(30×4) ≥ o ≤ o?12×(20×5)* *(AT) Mi sembra tuttavia (riprendendo il commento 24) che se si mettono insieme i due interventi di Brando (76 e 81) si arrivi ad una rappresentazione accettabile, tale almeno che Brioshi possa comprendere e interpretare correttamente, e a cui possa rispondere. Qui credo che sarebbe stato utile chiamare in causa la dualità 'trasparenza/economicità' della rappresentazione; forse riflettere su questo aspetto avrebbe indotto gli alunni a riconoscere la possibilità di un'altra scrittura, altrettanto trasparente, ma più economica rispetto a quella proposta da Brando.*

Commenti Insegnanti di classe: Pandolfi e Riva
Commenti Giancarlo Navarra

2ª Parte
Lezione telematica 6 aprile 2022 con i compagni della prima classe di Murlo. (docenti Marialuisa Pandolfi: IP, Alfonso Riva: IR).
Per questa lezione tutti i ragazzi delle due classi avevano da scrivere gli enti e le relazioni contenute nella situazione problematica B e anche produrre la loro rappresentazione per poi confrontarsi.
(Non si procede alla trascrizione della parte di diario relativa all'individuazione di enti e relazioni poiché molto simile a quella svolta per la versione A).
Si parte proiettando la diapositiva:



Si raccolgono in una tabella le principali rappresentazioni prodotte che vengono proiettate per essere commentate dai ragazzi in questa lezione:

Irene Semplici G = metri Giacomo A = metri Alberto G = ? x (20x5) A = 10 x (30x4) G = A ? x (20x5) = 10 x (30x4)	Brando Fabbri A = percorso di Alberto G = percorso di Giacomo n = numero di giri di Giacomo A = 10 x (30x4) = G = n x (20x5) n?	Mattia Arfeo A = (30x4) x 10 = (20x5) x ? = G	Noemi Benincasa a = percorso di Alberto g= percorso di Giacomo n = numero di giri percorsi da Giacomo 30 x 4 x 10 = a 20 x 5 x n = g a = g
Tommaso Romana G = Giacomo A = Alberto H = un certo numero di giri G = H x (20x5) A = 10 x (30x4)			
Caterina Sestini G = giri di Giacomo A = giri di Alberto T = totale metri di Alberto e Giacomo A x 30=T T:20 = G T? G?			
Merlin Kokora A = 10 x (30x4) G = ? x (20x5) 10 x (30x4) = ? x (20x5) 10 x (30x4) - (20x5) = ?	Aurora Cetrini A percorre 10 volte il prato Un lato 30 m G compie 12 giri un lato di 20 m A x 10 + 30 G + G x 20		

83. IP: Ragazzi, in tabella sono riassunte le principali tipologie di rappresentazioni che avete prodotto e il nome dell'alunno presente in ogni cella ci è necessario per capire quale rappresentazione discutere insieme volta per volta, ma dietro a quel nome ce ne sono altri non citati fra le due classi, che hanno prodotto la stessa rappresentazione.
84. IR: Concentriamoci sulle quattro rappresentazioni della prima riga, pensate se sono complete, se si può migliorare o cambiare qualcosa affinché Brioshi sia in grado di trovare il numero di giri che compie Giacomo. Partiamo dalla rappresentazione di Irene e compagni.
85. Irene: Dovevo specificare cosa significa il punto interrogativo?
86. *Gli altri si dichiarano d'accordo*.
87. Mattia: Io avrei scritto G=numero di metri del percorso di Giacomo e lo stesso per Alberto.
88. Alessia: Irene ha scritto 5 volte le lettere A e G invece avrebbe potuto scrivere direttamente:
    ?×(20×5)=10×(30×4)[27]
89. Caterina: L'ultima cosa scritta poteva essere scritta senza le parentesi.
90. Merlin: Sììì! Tanto sono tutte moltiplicazioni.
91. Giovanni: Secondo me le prime tre della prima riga sono tutte giuste e si potevano togliere le parentesi perché sono tutte moltiplicazioni.
92. Davide: Le parentesi servono per capire quale moltiplicazione viene prima e quale viene dopo[28].
93. Giovanni: Secondo me non importa capire quale moltiplicazione viene prima e quale viene dopo tanto il risultato non cambia.
94. IR: Nella rappresentazione di Irene cosa è (30×4) e cosa è (20×5)?
95. Irene: (30×4) è il perimetro del quadrato e (20×5) è il perimetro del pentagono.
96. IR: Mi sembra una osservazione giusta! Hai voluto rappresentare i perimetri delle due figure.
97. Niccolò: Io ho capito una cosa della rappresentazione di Mattia: innanzitutto bisognerebbe più specificare cosa è A, cosa è G e cosa è il punto interrogativo. Poi cosa vuol dire: A=(30×4)×10=(20×5)×?=G
98. IR: Niccolò risponderemo a questa domanda più tardi perché c'è da finire di un po' di cose avviate.
99. IP: L'intervento di Alessia diceva che erano state usate troppe A e G mentre quello di Caterina diceva che è inutile ripetere (30×4)×10=(20×5)×? perché tanto c'era già G=A. Pensate all'osservazione di Caterina e pensate a quello che deve fare Brioshi e a che cosa potrebbe capire di dover fare.
100. Muhammed: secondo me si deve togliere G=A perché lui non lo capisce e mandare solo (30×4)×10=(20×5)×?
101. IP: Cerchiamo di capire cosa è funzionale per noi e ciò che è funzionale per Brioshi.
102. Alessia: Se non si specifica cosa è G e A Brioshi non può mettere in relazione gli enti.
103. IP: Dovete tener presente ciò che serve a voi per capire e rappresentare e ciò che serve a Brioshi per rispondere, rileggete il testo… in modo che Brioshi possa calcolare[29].
104. Brando: Io infatti nella mia rappresentazione ho messo n =? Almeno si capiva cosa si doveva trovare.
105. Irene: Io manderei tutti e due però è più importante la parte numerica perché così Brioshi sa cosa deve calcolare.
106. IR: Nella scorsa volta avevamo individuato enti e le relazioni quindi se noi inviamo a Brioshi solo:
    G=metri Giacomo
    A=metri Alberto
    G=?×(20×5)
    A=10×(30×4)
    G=A

---

[27] *(AT) Alessia, con il suo intervento mostra di aver fatto quel salto di qualità che l'insegnante attendeva (vedi prima parte del diario). Credo che sottolineare il suo intervento e sottoporlo al giudizio dei compagni sarebbe stato importante, ma capisco la scelta degli insegnanti di non interferire troppo nella discussione e di lasciare che il dialogo tra gli alunni segua il suo corso. Decidere se e quando intervenire in una discussione è uno degli aspetti più difficili e delicati nella conduzione di un'attività, perché la decisione deve essere rapidissima, non consente il tempo di una valutazione ragionata, perciò non può che essere affidata all'istinto e all'esperienza. Solo una riflessione a posteriori (preziosi e illuminanti i diari!) consente di 'farsi le antenne' su questi aspetti cruciali.*

[28] *Riflessione comune: potevamo fermarci sull'affermazione di Davide per riflettere sull'effettivo significato attribuito dagli alunni alle parentesi; si è preferito lasciare scorrere la discussione per vedere se i ragazzi stessi sarebbero riusciti nell'intento.*

[29] *Riflessione comune: la nostra intenzione è quella di far scrivere in linguaggio algebrico: a) attribuzione corretta del significato alle lettere utilizzate sia per gli enti conosciuti che sconosciuti (vedi Brando e Noemi), b) esplicitazione della relazione da inviare a Brioshi.*

Può Brioshi, con ciò che abbiamo riportato, passare a sostituire questi numeri "?×(20×5)=10×(30×4)" o no? Che dici Marialuisa?[30]

107. IP: Io dico che Brioshi deve solo trovare il valore del punto interrogativo, che potrebbe essere espresso meglio con una definizione da più grandi, quindi la rappresentazione di Brando (A=10×(30×4)=G=n×(20×5) n?) è più da adulti rispetto a quella di Irene (?×(20×5)=10×(30×4)) ma entrambe permettono di calcolare il numero di giri richiesto.[31] Tutto ciò che avete scritto prima è servito a voi per rappresentare in linguaggio matematico la situazione. Alfonso non so come la vedi….
108. Niccolò: Io in tutte queste rappresentazioni trovo una cosa in comune: che nessuna di loro ha risposto al quesito del problema. Perché il quesito del problema chiedeva quanti giri percorre Giacomo? Qui ognuno ha detto che A=G e basta.[32]
109. IR: Ma Niccolò ritieni che nessuno ha risposto correttamente?
110. Niccolò: Forse quella che ci è andata vicino è Caterina Sestini (A×30=T T:20=G T? G?) perché in questo problema l'operazione da veramente usare è il diviso[33].
111. Mattia: Secondo me è vero che bisogna trovare i metri che fa Giacomo, ma dice anche che i metri che fa Giacomo sono uguali a quelli che fa Alberto allora bisogna trovare quelli che fa Alberto.
112. IR: Ma chi deve trovare questo numero di giri che fa Giacomo?
113. Niccolò: Brioshi[34].
114. IP: Allora se Brioshi trova il numero di giri che cosa vuol dire con parole vostre 'rappresentare il problema'?
115. Brando: Scrivere cosa dice il problema in modo che lui lo capisca.
116. Giovanni: Lo possiamo tradurre nella sua lingua o lo si può tradurre in linguaggio del problema. Io scriverei 'n?'.
117. Brando: n? A=10×(30×4)=G=n×(20×5).
118. Tommaso: Bisognerebbe togliere le lettere perché Brioshi non sa decifrare le lettere.
119. IP: Ci detti cosa scriveresti?
120. Tommaso: 'n?' non serve, ma manderei 10×(30×4) e poi di sotto gli metterei l'altra rappresentazione n×(20×5).
121. IR: Tommaso, tu manderesti solo questa scrittura?
122. Tommaso: Sì!
123. Niccolò e Noemi: Manca l'uguaglianza, se tu volevi togliere le lettere, qui manca l'uguaglianza sennò Brioshi calcola 1200 e 100.
124. Tommaso: Eh sì, mi sono dimenticato l'uguaglianza, dopo il 4 metterei l'uguaglianza con n×(20×5) perché in quel modo è completa. Io manderei questo.
125. Alessia: Sì, volevo dire che secondo me, anche se Brioshi non capisce le nostre lettere, non c'è bisogno che specifichiamo A e G cosa sono, cioè sono d'accordo con quella di Brando perché se Brioshi deve calcolare questi metri che percorrono tutti e due, deve almeno sapere cosa calcolare, cioè se risolve 10 per 30 per 4 e numero sconosciuto per 20 per 5, quando l'ha risolto che fa? Non sa neanche cosa fare. Secondo me la lettera la dobbiamo mettere ma anche non specificandola se lui non capisce la nostra lingua.
126. Merlin: Allora io invece farei 10×30×4 meno 20×5 che è uguale all'incognita, almeno capiamo quanti sono i giri che fa Giacomo.
127. IP: Questa rappresentazione di Merlin è quella della sottrazione; è un passaggio ancora più forte. Ci sono due livelli: uno in cui il numero dei giri si calcola per differenza, in cui però, parlo per Alfonso, Merlin ha perso la semantica del problema. Perchè… scusa Merlin, quando te dici 10×30×4, cosa vai a trovare, che significato ha?[35]
128. Merlin: 10 è il numero dei giri,×30 il numero di metri e 4 è il numero totale dei lati e trovo il numero dei metri che ha fatto Alberto.

---

[30] *A posteriori, l'intervento, fatto per uscire da questo impasse, ha pilotato troppo i ragazzi anziché farli giungere autonomamente alla costruzione del concetto.*
[31] *IP: Non sono stata affatto chiara: bastava dire che Brando è stato più corretto nell'esplicitare l'incognita con una lettera rispetto a Irene che ha utilizzato il simbolo '?'. D'altra parte Brando ha appesantito la rappresentazione con una catena di uguaglianze e lettere mentre Irene ha fornito una uguaglianza più snella.*
[32] *Riflessione comune: Niccolò perde il controllo di ciò che viene richiesto nella situazione problematica: rappresentare piuttosto che risolvere.*
[33] *Riflessione comune: purtroppo Niccolò in questo momento è ancora posizionato nella "camera procedurale".*
[34] *Riflessione comune: Niccolò, che in realtà ha buone intuizioni sulla individuazione delle relazioni, si sta rimettendo in carreggiata.*
[35] *Riflessione comune: Merlin riapre la questione procedurale per giunta perdendo il controllo semantico e sintattico della situazione. Nel prosieguo della discussione Tommaso apporterà delle osservazioni chiarificatrici sia sulla procedura sia sul significato. Mi vien da dire che la domanda 'cosa vai a trovare' indirizzi essa stessa in senso procedurale. Infatti Merlin (128) risponde che 'trova il numero dei metri', cioè un risultato.*

129. IP: Bene, e poi c'è una sottrazione, cosa vai a sottrarre?
130. Merlin: Vado a sottrarre il perimetro del pentagono.
131. IP: E te dici che con questa sottrazione trovo il numero dei giri? Il perimetro del pentagono lo percorri una volta?
132. Altri ragazzi: Più volte…
133. IR: Merlin aveva fatto anche l'altra volta questa rappresentazione.
134. IP: Siete tutti d'accordo con Merlin?
135. Tommaso: Secondo me non va fatta la sottrazione ma la divisione, se vuoi fare questo passaggio va fatta la divisione perché anche se si prova a calcolarlo verrebbe 1200 meno 100 quindi Giacomo non può aver fatto 1100 giri al pentagono, bisogna fare 1200 diviso il numero 20×5 quindi 100 e viene fuori 12. Giacomo ha fatto 12 giri.[36]
136. IR: Merlin si è convinto che non può aver fatto tutti quei giri?
137. Merlin: Sì, sì.
138. IR: 1100 giri è anche non plausibile.
139. IP: Perchè in questa maniera affermi che ha fatto solo un giro, c'è da capire quanti giri ha fatto.
140. Zeno: 1200 non sono i giri che fa Alberto ma i metri che percorre.
141. IR: Se abbiamo assodato che a Brioshi dobbiamo fornire una rappresentazione in modo che lui calcoli il numero dei giri fatti da Giacomo e abbiamo anche assodato che, con il penultimo intervento, non possiamo dare una rappresentazione sottraendo, per i motivi detti prima, a questo punto possiamo fornire a Brioshi le rappresentazioni di Merlin, Caterina e di Aurora? Forse di Aurora non abbiamo ancora discusso, però in tutte queste si forniscono dei calcoli, noi invece dobbiamo fare in modo che lo faccia Brioshi quindi se sei d'accordo magari potremmo a questo punto condividere la rappresentazione che riteniamo più corretta e dopo provare a mettersi nei panni di Brioshi tentando di risolverla, o è troppo presto Marialuisa?
142. IP: Se abbiamo capito che le prime 4 differiscono per poche cose e che la rappresentazione del gruppo di Caterina Sestini e il gruppo di Merlin e Aurora Cetrini sono diverse... possiamo accettare la proposta del professore Riva?
143. Alunno: Io non ho capito quella di Aurora.
144. IP: E su questa cercheremo di riflettere in seguito; partiamo dalle prime 4 che abbiamo analizzato in modo capillare e decidiamo tra tutti i ragazzi di Monteroni e Murlo quale rappresentazione definitiva mandare, in modo che sia responsabilità di tutti.
145. IR: Dobbiamo arrivare a una conclusione, ne abbiamo già parlato abbastanza… o qualcuno fa una proposta e votiamo.
146. Tommaso: mandiamo quella ultima di Brando 10×30×4 è uguale a n×20×5, mi pare quella più giusta.
147. IP: Siamo tutti d'accordo?
148. Niccolò: secondo me questa è giusta però poi Brioshi deve andare per tentativi per trovare cosa è n. Per trovare n, Brioshi non ha un passaggio semplice per farlo ma deve proprio andarcelo a cercare lui per tentativi.

---

[36] *La frase di Tommaso rivela un fondo procedurale: "non va fatta la sottrazione", "se si prova a calcolarlo verrebbe", "bisogna fare 1200 diviso", "viene fuori 12". Osservo però questo: se da un lato è vero che le classi presentano ancora un retropensiero procedurale, allo stesso tempo mostrano delle 'intuizioni relazionali' indotte da tutte le esperienze proposte quest'anno dagli insegnanti. Fanno capire inoltre di condividere il valore che essi attribuiscono all'argomentazione, al confronto collettivo, alla discussione. Ritengo che stia maturando il momento di fare con la classe un bilancio della situazione e riflettere sul cambio di prospettiva: cosa significa rappresentare una situazione problematica in linguaggio matematico? Soprattutto: qual è il ruolo di Brioshi? In questo modo si chiarirebbero dubbi e convinzioni degli alunni in merito alle lettere, come per esempio quelli espressi da Alessia (125): "*Se Brioshi non capisce le nostre lettere, non c'è bisogno che specifichiamo A e G cosa sono*". Frasi come queste, che gli insegnanti ora hanno l'evidente merito di promuovere, sono spunti importantissimi perché permettono di approfondire con la classe i significati della dualità rappresentare/risolvere e chiarire quello che forse è il NODO del cambiamentio; in estrema sintesi: gli alunni risolvono il problema, Brioshi risolve l'equazione, e non ha idea a cosa si riferiscano la lettera, o le lettere, che essa contiene (metri, numeri di fiori, peso di portaerei). Quando gli alunni dicono che 'Brioshi non capisce le lettere' forse intuiscono questo aspetto. Quando qualche alunno mi chiede "Ma come fa lui a sapere che il problema parla di… ', gli rispondo che Brioshi non può saperlo proprio perché risolve l'equazione e non il problema. Quando poi egli invia loro il valore dell'incognita, sono gli alunni che gli hanno inviato il messaggio a legare la soluzione ricevuta alla consegna, cioè a contestualizzare il significato della lettera. Questo accade sempre, e Brioshi è una buona metafora per comprendere un atteggiamento che appartiene ad un qualsiasi risolutore di problemi che imposti un'equazione (o un sistema): quando l'ha costruita mette in frigorifero il problema (magari un complicato insieme di solidi variamente collegati fra loro da superfici, o raggi, o altezze, o volumi) e si concentra sull'equazione preoccupandosi di applicare correttamente principi, trasporti, cancellazioni, sostituzioni. Quando l'ha risolta, sa di aver trovato il valore dell'incognita; a questo punto smette i panni di Brioshi e collega questo valore alla consegna del problema. I ruoli quindi sono profondamente diversi.*

Monteroni d'Arbia (SI)	*I*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	***1***	*2*	*3*	***Marialuisa Pandolfi*** *(1^parte)*
Monteroni d'Arbia (SI)	*I*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	***1***	*2*	*3*	***Alfonso Riva-Marialuisa Pandolfi*** *(2^parte)*

149. IR: Penso che a Murlo non solo Niccolò, ma anche qualche altro alunno, non sa quali passaggi fare per arrivare a n. A Monteroni saprebbero quali passaggi fare se questa è la rappresentazione giusta? Qualcuno ha idea?
150. Tommaso: secondo me non serve sapere quanto è n, però visto che g=a basta calcolare a per avere g.
151. IR: Noi abbiamo sempre detto che ora sono cavoli di Brioshi, nel senso che poi ci penserà lui e effettivamente ora stiamo ragionando sul fatto se questa rappresentazione può bastare oppure no. Poi tu giustamente dicevi che qualche sistema c'è e qualcun altro… perché Maria Luisa quanto hanno lavorato l'anno scorso sulle bilance?
152. Penso per niente, loro usano le macchinette.
153. Tommaso: secondo me per trovare n bisognava fare la divisione 10×30×4 diviso 20×5 e si trova n.
154. IR: Secondo questo ragazzo quindi Brioshi ce la farà perché la matematica la sa.
155. IP: Provate a scrivere sul foglio i passaggi per trovare n e poi li condividiamo.
156. IR: Brioshi può lavorare in più modi per trovare n; proviamoci tutti.
157. *Seguono 10 minuti di lavoro individuale.*
158. IR: Apriamo una jamboard[37] e condividiamo le proposte.

---

[37] *La jamboard riporta:*
- prima proposta quella di Tommaso che risolve per via aritmetica attraverso l'operazione di divisione,
- seconda proposta quella di Niccolò che risolve per tentativi trovando il fattore corretto tra i possibili.
Va detto che nessuno degli alunni ha proposto di utilizzare la metafora della bilancia come strumento risolutivo, forse perché questa situazione problematica presenta solo relazioni di tipo moltiplicativo che presuppongono una comprensione profonda del secondo principio di equivalenza.
Sarebbe stato più corretto se Tommaso avesse realizzato il suo progetto 'fare la divisione 10×30×4 diviso 20×5, invece che 10×(30×4):20×5, 10×30×4:(20×5).
(AT) Alcune considerazioni conclusive. Mi piace molto l'idea di far dialogare tra loro le due classi che hanno lavorato sullo stesso problema. Leggendo il diario si sente, da parte degli alunni, partecipazione alla situazione che stanno esplorando e coinvolgimento nel compito loro assegnato. Nonostante non riescano ancora a separare l'aspetto della rappresentazione da quello della risoluzione (rivelatore e molto chiaro a questo proposito l'intervento di Niccolò (108): "Io in tutte queste rappresentazioni trovo una cosa in comune: che nessuna di loro ha risposto al quesito del problema. Perché il quesito del problema chiedeva quanti giri percorre Giacomo? Qui ognuno ha detto che A=G e basta"), si sforzano di mettersi nei panni di Brioshi per capire quale, tra le tante scritture proposte, sia la migliore da inviargli. Ho apprezzato il fatto che gli interventi degli insegnanti non siano condizionanti, evitino il classico 'botta e risposta', ma lascino agli alunni la possibilità di spiegarsi e di argomentare le proprie idee; trovo bello anche il modo in cui gli alunni prendono in considerazione le ragioni degli altri e provano a confermarle o a confutarle.
Dal diario emergono anche alcuni elementi critici. Uno, rilevato anche dagli insegnanti nel loro ultimo commento, riguarda l'assenza dalla discussione di riferimenti alla bilancia a piatti, per cui, anche quando gli alunni arrivano a costruire l'equazione che traduce il problema in linguaggio matematico (148), la ritengono insufficiente ad aprire la strada verso la soluzione (Niccolò 148: "Secondo me questa è giusta però poi Brioshi deve andare per tentativi per trovare cosa è n"). Anche se poi utilizzano l'equazione come punto di partenza per le loro proposte di risoluzione (bene fa l'insegnante a sollecitarli in questo senso), sembrano quasi considerarla un ostacolo da aggirare più che un mezzo per risolvere il problema.
Il secondo aspetto riguarda una questione di metodo. La tabella su cui le classi sono chiamate a confrontarsi presenta un numero considerevole di scritture diverse ed articolate. Tenere sotto controllo tanti dati contemporaneamente costituisce un compito obiettivamente difficile, non solo, ma può risultare dispersivo e problematico da gestire anche per chi conduce l'attività. Mi viene da pensare che sarebbe stato più proficuo stabilire insieme agli alunni alcuni criteri di selezione delle scritture matematiche che loro propongono, in modo da circoscrivere il campo dell'esplorazione a pochi dati per volta. Questo in parte viene fatto, bypassando ad esempio le formulazioni che manipolano la rappresentazione nella direzione del calcolo, ma penso al tema già citato dell'economicità e della trasparenza. Questi due aspetti vanno tenuti insieme se si vuole ottenere una rappresentazione che contenga tutte le informazioni necessarie al risolutore per svolgere il suo compito, ma niente più di quelle. In base al criterio dell'essenzialità e della trasparenza gli alunni avrebbero potuto, forse, arrivare ad escludere dalla rappresentazione gli elementi superflui o ridondanti (es. le catene di uguaglianze di Brando e Mattia o l'abbondanza di frasi nelle rappresentazioni di Irene, Noemi e Tommaso) per concentrarsi sull'uguaglianza tra le rappresentazioni dei due percorsi espressi in forma non canonica.
Altro criterio da considerare è il modo di rappresentare l'incognita: meglio la lettera del punto di domanda, e meglio 'n' che 'H' per indicare il 'numero di giri' percorsi da Giacomo. Questo punto è stato affrontato, ma si è mescolato ad altre questioni, pure interessanti (penso ad esempio agli interventi sull'uso delle parentesi), rendendo meno facile, a me pare, il percorso per giungere ad una sintesi del lavoro svolto. Si tratta in ogni caso di un lavoro molto ricco e stimolante che offre ottimi spunti di riflessione a chi voglia approfondire le implicazioni didattiche di un approccio algebrico ai problemi.

Monteroni d'Arbia (SI)	*I*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	***1***	*2*	*3*	***Marialuisa Pandolfi*** *(1^parte)*
Monteroni d'Arbia (SI)	*I*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	***1***	*2*	*3*	***Alfonso Riva-Marialuisa Pandolfi*** *(2^parte)*

$10 \times (30 \times 4) : 20 \times 5 = n$

$1200 : 100 = 12 = n =$ giri GIACOMO

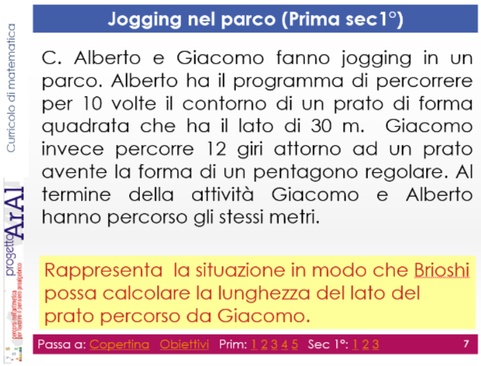
$$\underbrace{10 \times 30 \times 4}_{1200} = \underbrace{n}_{12} \times \underbrace{20 \times 5}_{100}$$

200

(MDP) Secondo me forse occorreva dedicarsi un po' di più alle relazioni fra gli enti, per spostarsi dalla costante necessità di risolvere a quella di rappresentare, ma non solo perché poi risolverà Brioshi, proprio per ricordare che le rappresentazioni sono numeri in forma non canonica, uguaglianze, e quella n, che attraverso la discussione viene giustamente lasciata come unica lettera da inviare a Brioshi, va considerata come numero da subito, e non fino alla fine come un numero che si deve trovare, tanto che i ragazzi provano ad eliminarla, fino all'ultimo...
Non so se mi sono spiegata chiaramente, ma la sensazione è che sia gli alunni, sia IP, forse un po' meno IR, restino troppo ancorati alla situazione, il che porta a cercare la soluzione.
Sarebbe stato meglio arrivare all'uguaglianza fra due prodotti, in cui uno dei fattori è un numero n ancora sconosciuto... e dimenticarsi del perimetro, dei giri, del numero che manca... quello si era già fatto in fase di traduzione in linguaggio matematico.
E forse così la bilancia sarebbe venuta fuori…

3ª Parte
Lezione in presenza 6 giugno 2022 (docente Marialuisa Pandolfi).[38]

Tutti i ragazzi hanno già affrontato la situazione A e B.
Si parte proiettando la diapositiva con la situazione C:



159. I: Scrivete gli enti del problema e le relazioni, poi passeremo a rappresentare la situazione.
160. *Alessia legge ciò che ha scritto*:

<u>enti:</u>
- a. 10 numero di giri percorsi da Alberto
- b. 30m lunghezza del lato del prato di forma quadrata
- c. 12 numero di giri percorsi da Giacomo
- d. 20m misura del lato del quadrato
- e. richiesta: rappresenta la situazione

<u>relazioni</u>:
- f. forma pentagonale: figura geometrica che ha cinque lati e cinque angoli uguali
- g. forma quadrata: figura geometrica che ha quattro lati e quattro angoli uguali di 90° ciascuno

161. I: Qualcun altro ha scritto altre relazioni? [39]

---

[38] *Sia questa lezione che quella del giorno successivo sono di grande interesse. L'insegnante affronta aspetti nodali nell'approccio ad un problema e alla ricerca della sua rappresentazione al fine di risolverlo. L'individuazione degli enti e delle relazioni che li collegano non è semplice, e gli alunni mostrano non solo che cominciano a possedere gli strumenti necessari per farlo, ma anche che sanno dialogare con l'insegnante. Stanno vivendo un momento importante nell'affinamento del balbettio algebrico. I commenti che ho cercato di organizzare si intrecciano con quelli dell'autrice e talvolta anticipano ciò che poco dopo avverrà in classe. Gli spunti di riflessione sono molto numerosi, e secondo me è proprio da questo intreccio (in cui tutti – alunni, docente, commentatori – si mettono in gioco, che matura la comprensione di come può migliorare la conduzione dell'attività.*

[39] *Avrei posto in discussione il punto 'e' della proposta di Alessia prima di proseguire chiedendole perché inserisce fra gli 'enti' la richiesta 'rappresenta la situazione'? Una 'richiesta' non è un 'ente': l'ente è un numero (noto o sconosciuto) la richiesta di rappresentare è una consegna, un invito a fare qualcosa. Penso che gli alunni capirebbero la differenza. Anche leggendo cosa lei scrive sotto 'relazioni', mi vien da pensare che la classe intuisca/capisca la differenza fra 'enti' e 'relazioni' ma non abbia ancora chiaro che si sta lavorando sulle* rappresentazioni *e quindi che il nodo non sta tanto nel cogliere un qualcosa 'che contiene in sé l'idea di relazione' (ad es: 'figura geometrica che ha cinque lati e cinque angoli uguali') ma nel* rappresentare la relazione *che la definizione in qualche modo esprime, e cioè la relazione moltiplicativa fra gli enti, cioè fra il numero dei lati, la lunghezza di ogni lato e il numero delle volte che si ripete il percorso. Questi aspetti si evidenziano poco dopo (165) ma non è chiaro chi sia l'autore delle scritture 'l×4' e 'l×5': gli alunni, ma mancano protocolli in questo senso, o l'insegnante, che ritiene che le frasi (f) e (g) non abbiamo bisogno di ulteriori passaggi e siano pronte per una loro traduzione in linguaggio matematico? Se fosse vera la seconda ipotesi, credo che gli alunni colgano il senso di ciò che scrive l'insegnante in (1) e (2) ma da soli non sarebbero in grado di farlo.*
Concludo cercando di riassumere la situazione in un piccolo schema:

Monteroni d'Arbia (SI)	*I*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	***1***	*2*	*3*	***Marialuisa Pandolfi*** *(1^parte)*
Monteroni d'Arbia (SI)	*I*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	***1***	*2*	*3*	***Alfonso Riva-Marialuisa Pandolfi*** *(2^parte)*

162. Mattia: Io ho scritto: 'al termine delle attività Giacomo e Alberto hanno percorso gli stessi metri, n° m G=n° m A'
163. Brando: Io dico che c'è un'altra relazione tra la lunghezza del lato della figura e il numero di lati della figura.
164. Virginia: Una relazione è quella del perimetro del quadrato e un'altra è quella del perimetro del pentagono.
165. I: Quindi possiamo aggiungere all'elenco di Alessia queste tre relazioni
    1) *perimetro del quadrato*: 1×4
    2) *perimetro del pentagono*: 1×5
    3) *n° m G= n°m A* [40]
166. Alessia: Era quello che volevo dire con *forma pentagonale* e *forma quadrata.*
167. I: Alessia leggi bene: quale tra la tua e quella di Brando ti/vi sembra più esplicita?
168. Tommaso: Quella di Brando perché si capisce che operazione si deve fare[41].
169. I: Come potreste definirla?
170. Irene: Una relazione moltiplicativa o il prodotto fra misura del lato e numero dei lati.
171. I: Ok, procedete ora a scrivere sul vostro quaderno la rappresentazione che inviereste a Brioshi.
172. Davide: (30×4)×10=(5×n)×12, dove n è la lunghezza del lato del pentagono.
173. I: Ci dai il significato del primo membro dell'uguaglianza?
174. Davide: (30×4) è il perimetro del quadrato e 10 sono i giri che fa Alberto, (5×n) rappresenta il perimetro del pentagono e 12 è il numero di giri che fa Giacomo.
175. I: Traducete in linguaggio naturale.
176. Davide: Il prodotto tra il perimetro del quadrato e il numero di giri di Alberto è uguale al prodotto tra il perimetro del pentagono e il numero di giri che percorre Giacomo.
177. Alessia: Io ho scritto: 10×(30×4)=12×(5×n) ma è la stessa cosa!
178. I: Cosa intendi per la stessa cosa?
179. Brando: Ha usato la proprietà commutativa.
180. Tommaso: Ma la sostanza non cambia[42].
181. I: Dovremmo essere più chiari, Alessia tu quale tipo di linguaggio hai usato?
182. Alessia: Ah già, quello matematico.
183. I: Io avevo chiesto di tradurre in linguaggio naturale. Ora vediamo cosa mandereste a Brioshi poi discuteremo delle possibili rappresentazioni; partiamo dalla relazione di Mattia: n° m G= n°m A, cosa ne pensate?
184. Alcuni alunni: Noi si capisce ma Brioshi mhhh…, "n° m G" o "n° m A" non ha significato per lui.

Enti: 10 30 4 12 5 l

Relazioni: moltiplicativa moltiplicativa

equivalenza

[40] *Avrei attirato l'attenzione della clase anche su questa scrittura di Mattia. Proprio perché si sta favorendo la maturazione di aspetti molto delicati dell'evoluzione del balbettio algebrico, si potrebbe inserire la sua scrittura nell'evoluzione del linguaggio algebrico (sintetizzo dal mio libro) raccontando che l'evoluzione del linguaggio algebrico ha una storia lunghissima. Gli storici descrivono tre fasi, che sono state chiamate: (a) dell'algebra* retorica *(dall'antichità – dagli scritti babilonesi, egiziani, dei Pitagorici – fino a Diofanto di Alessandria, III-IV secolo dopo Cristo) in cui i procedimenti algebrici venivano espressi mediante l'uso di parole; (b) dell'algebra* sincopata *(da Diofanto sino alla fine del XVI secolo) nella quale alcuni termini venivano sistematicamente indicati mediante abbreviazioni; (c) dell'algebra* simbolica *(iniziata in pieno Rinascimento da François Viète (1540-1603) e da René Descartes (1596-1650)). Mi sembra interessante e formativo mettere in evidenza come la frase di Virginia 'n° m G=n° m A' sia riconducibile, secondo me, alla fase* sincopata*: 'Il numero (n°) dei metri (m) percorsi da Giacomo (G) è lo stesso (=) del numero (n°) dei metri (m) percorsi da Alberto (A)'. Riflettendo su questo con gli alunni (anche qui, personalmente, li tratterei da 'grandi') si potrebbe giungere all'opportunità di una scrittura in linguaggio naturale che non si concentri sui due ragazzi, e quindi che non abbia come soggetto 'Giacomo e Alberto', ma sposti l'attenzione alla lunghezza del percorso che ognuno di essi compie; si giungerebbe così ad una parafrasi come:*

'La lunghezza del percorso di Giacomo è uguale alla lunghezza del percorso di Alberto'.

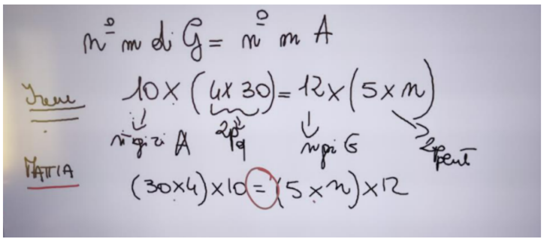
Questa frase costituirebbe il traghetto semantico verso la sua traduzione in linguaggio simbolico *(la terza 'fase' dello sviluppo del linguaggio algebrico):*

'G=A'.

[41] *Tomaso è ancora in ambiente procedurale: non è chiaro quanto limiti una relazione fra enti alla sola operazione che lega due o più numeri-enti o sia cosciente del significato più ampio.*

[42] *Era meglio se facevo spiegare a Tommaso la sua frase.*

185. *Irene e Mattia vengono alla lavagna e scrivono le loro rappresentazioni, poi spiegano il significato degli enti scritti:*



186. I: Che ne dite delle due rappresentazioni matematiche?
187. Merlin: Sono uguali, cambia l'ordine ma dicono la stessa cosa.
188. I: L'ordine?
189. Alessia: L'ordine dei fattori, insomma è stata applicata la proprietà commutativa.
190. I: Allora le due forme non sono uguali, si dice che sono equivalenti[43]. Cosa rappresenta il primo membro? … Se pensate in ambito matematico?
191. *Gli alunni rimangono in silenzio*.
192. I: Se vi scrivo 2×3=6, e 6×1=6 sapete dirmi cosa sono 2×3 e 6×1 rispetto a 6?
193. Alunni: La forma non canonica di 6.
194. I: Quindi indicano la stessa quantità.
195. Alunni: Sì!!!
196. I: Sono due forme equivalenti che indicano la stessa quantità. Allora ritorno alla domanda precedente: 10×(4×30) e 12×(5×n) come possiamo definirle da un punto di vista matematico?
197. Camilla: Due forme non canoniche diverse ma dello stesso numero.
198. I: Bene… Riuscite a dirmi le relazioni in gioco?
199. Mattia: Moltiplicativa e riflessiva dell'uguaglianza.
200. I: Magari rispondi con una frase completa[44], poi avete scritto altre rappresentazioni?
201. Alunni: No, sono tutte come quelle alla lavagna[45].
202. I: Ma… ne discuteremo, provate adesso a risolvere come se foste Brioshi.
203. Alessia*:* Ho fatto come fosse una espressione. *Scrive:*
    n=10×(30×4):12×5=
    1200:60=
    20 m lato del pentagono, quindi n=20.

---

[43] *Non so, riascoltando la registrazione, se ho combinato un errore pesante nell'utilizzare il concetto di equivalenza come "sinonimo" di quello di forma canonica e non di un numero. Abbiamo affrontato il concetto di equivalenza in classe con le frazioni, la forma canonica e non di un numero e in geometria ci siamo limitati a tassellare figure geometriche semplici a partire da una figura piana presa come unità di misura. Può essere un utile contributo a queste riflessioni quello che ho scritto nel libro a questo proposito (frutto di ragionamenti congiunti con Nicolina Malara):*

'Espressioni – le chiamiamo anche scritture o forme - aritmetiche o algebriche che siano, quando sono trasformabili l'una nell'altra sono definibili come *equivalenti* oppure come *uguali*. La differenza fra le due definizioni *dipende dal punto di vista* dal quale le si consideri:

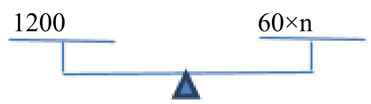
(a) punto di vista *procedurale*: le espressioni si dicono *uguali* quando l'attenzione si concentra sull'invarianza del loro *risultato*;

(b) punto di vista *relazionale*: le espressioni si dicono *equivalenti* quando si guarda ad esse come processi, cioè come *rappresentazioni non canoniche* dello stesso numero.'

[44] *Ottimo invito!*

[45] *Non ho approfondito, presa dalla lezione, ma successivamente, con l'analisi della situazione problematica D la richiesta viene esaudita (243).*

204. Mattia: Secondo me ha sbagliato il procedimento[46] perché a 12×5 doveva mettere le parentesi perché, senza, dopo che hai fatto 30 per 4 si divide solo per 12 e non 12×5[47],
205. I: Attenzione, perché la dimenticanza sottolinea un errore 'formale' che porta a rappresentare una situazione problematica completamente diversa[48].
206. Alessia: Me ne sono dimenticata ma ho calcolato bene. Dovevo scrivere n=10×(30×4):(12×5).
207. Brando: Io ho risolto così
    10×(30×4) =1200 che sono i metri del percorso di Alberto,
    1200:(12×5)=20 metri del lato del pentagono che è uguale ad n.
208. Mattia: Ho scritto:
    1200=(5×n)×12
    1200=60×n
    n=1200:60=20
209. I: Tutti gli altri cosa ne pensano delle tre versioni?
210. Brando: La migliore è quella di Mattia perché ci fa capire meglio il procedimento.
211. I: Voi avete capito tutti cosa intende Brando?
212. Brando: Perché Mattia ha messo l'uguaglianza tra il percorso di Alberto e quello di Giacomo.
213. Mattia: Alessia ha specificato subito il significato di n, scrivendo 'n=', come se svolgesse una espressione.
214. Brando: Io n l'ho specificato in fondo dicendo che n sono i metri del lato del pentagono che è uguale ad n.
215. I: Ricordati che chi risolve (Brioshi calcola e basta, non conosce il significato dei numeri utilizzati, cioè cosa rappresentano nel problema in questione) utilizza solo un linguaggio matematico non uno misto "matematico-naturale". Sicuramente Brioshi riesce a risolvere le operazioni al primo membro e al secondo membro, ha tolto le parentesi, che abbiamo detto non sono essenziali, e ha applicato la proprietà commutativa al prodotto (5×n)×12, come ha fatto Mattia. A questo punto trovare il valore di n gli è stato possibile[49]. Adesso vorrei che faceste una riflessione a partire da ciò che ha scritto Mattia: 1200=60×n; quasi tutti avete trovato il valore rappresentato da n in via aritmetica, ma a nessuno è venuto in mente che l'uguaglianza fra i due membri di cui uno ha un fattore sconosciuto, poteva essere rappresentata con la metafora della bilancia.
216. Alunni: Ah! È vero!
217. I: Provate a disegnarla sul vostro quaderno.
218. Mattia (*descrive la sua bilancia e io scrivo sullo schermo*): Sono partito da: 1200=(5×n)×12, poi: 1200=60×n:



---

[46] *L'uso del termine 'procedimento' da parte di Mattia mi porta ad inserire qui un breve testo sulla differenza fra 'procedimento' e 'processo' (sempre tratto dal mio libro):*

> 'Il confronto tra i due punti di vista permette di giungere ad un chiarimento fra termini spesso visti come interscambiabili: procedimento e processo. Il primo si riferisce ad una elencazione, più o meno argomentata, delle operazioni che conducono all'individuazione del risultato, cioè della risposta al quesito del problema, indica quindi qualcosa che si sviluppa nel tempo. Il secondo va riferito alla rappresentazione della struttura del problema, cioè dell'insieme delle relazioni che collegano gli enti in gioco. Come tale, il processo possiede un significato che non è né temporale né spaziale: le definizioni di questo tipo riflettono una lettura metacognitiva dell'espressione, la vedono come *oggetto matematico*.'

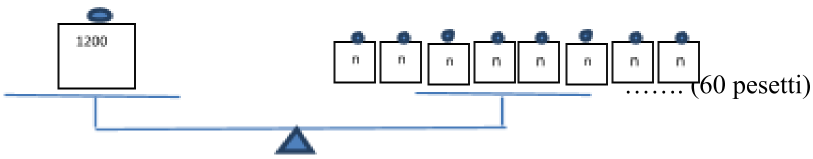
In conclusione: ritengo il termine 'procedimento' associabile ad una concezione 'classica' della soluzione di un problema o di un'espressione; nel caso della soluzione di un'equazione, come in questo caso, si tende a parlare di 'metodo' nella sua soluzione, non di 'procedimento'.

[47] *Tutto il linguaggio di Mattia deve migliorare ma io non glielo ho sottolineato presa dal pensiero di discutere con loro dell'errore e cercare di chiarire che dietro ad un errore formale comporta spesso un significato diverso. Sono d'accordo.*

[48] *E qui dovrò far lavorare i ragazzi a produrre testi di situazioni problematiche una volta assegnata soltanto la rappresentazione per Brioshi come consegna.*

[49] *Molti di loro hanno calcolato 'n' in modo aritmetico non pensando alla metafora della bilancia che, nella prima parte dell'anno scolastico, nelle ore di laboratorio a classi aperte, hanno costruito direttamente. Successivamente hanno lavorato soltanto alla condizione di equilibrio e su alcune situazioni problematiche che prevedevano la bilancia come metafora ma non sui due principi di equivalenza, soprattutto sul secondo. La nostra esperienza porta a dire che è molto importante costruire e rinforzare i saperi legati alla bilancia in modo che gli alunni abbiano il tempo di modificare il loro modo di pensare da 'svolgo le operazioni' a 'risolvo l'equazione'.*

219. Virginia: La bilancia è in equilibrio, ce lo dice l'uguaglianza e si vede dall'asta che è orizzontale.
220. I: Se non avessi l'uguaglianza fra le due quantità, come dovrebbe essere l'asta?
221. Camilla: Che pende da una parte o dall'altra.
222. I: Spiegati meglio.
223. Virginia: L'asta dovrebbe essere in posizione obliqua e dovrebbe pendere dalla parte dove la quantità è maggiore.
224. I: Adesso provate a pensare ad un'altra situazione problematica, diversa da quella che abbiamo trattato fino ad ora ma che possa essere rappresentata con la bilancia che è disegnata.
225. Mattia: 1200 è il percorso totale di Alberto.
226. I: Ma non pensare al problema di Alberto e Giacomo, piuttosto ad una situazione concreta che sia rappresentabile con questa bilancia, cerco di spiegarmi meglio: sul piatto di sinistra non posso fisicamente mettere i metri del percorso che ha fatto Alberto!
227. Merlin: Sul piatto di sinistra posso pensare di mettere un peso da 1200 gr e dall'altro lato…
228. Brando: Tanti pesetti di cui non conosciamo il peso.
229. I: Che vuoi dire con l'espressione "tanti"? Incomincio a disegnare la bilancia in base a quello che dici, vedi se ho capito bene.
230. Brando: sì… volevo dire 60 pesetti uguali.
231. Merlin: 60 pesetti con n dentro[50].
232. Brando: Di ogni pesetto non si conosce il peso.
233. I: Perché usi la parola ogni? Ed n cosa rappresenta nella bilancia?
234. Brando: I pesetti sono tutti uguali, ogni non serve! … E n è il peso di ogni pesetto.



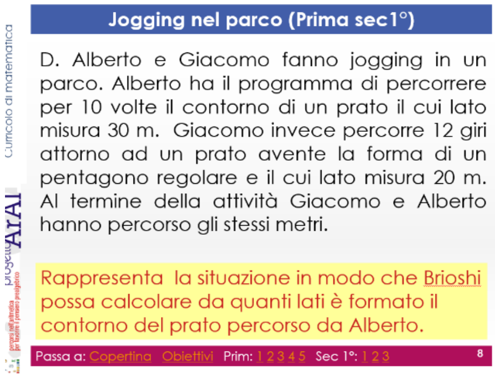
235. I: Se la bilancia come strumento serve a trovare il peso di un oggetto, invece di avere pesetti su entrambi i piatti, come vi immaginereste una situazione più realistica? difficilmente si hanno situazioni in cui la bilancia ha pesi su entrambi i piatti e null'altro.
236. Merlin: Da una parte ci potrebbe stare il peso da 1200 e sull'altro piatto 60 sacchetti di sale, e n è il peso di un sacchetto soltanto.
237. I: Ok, ci dobbiamo fermiamo qua.

[50] *Penso che con l'espressione "con n dentro", Merlin si riferisca per analogia al peso di 1200 che ho appena disegnato. Sì. Che con 60 pesetti di peso 'n' si equilibrano i 100 grammi del piatto di sinistra.*

Monteroni d'Arbia (SI)	*I*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	***1***	*2*	*3*	*Marialuisa Pandolfi (1^parte)*
Monteroni d'Arbia (SI)	*I*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	***1***	*2*	*3*	*Alfonso Riva-Marialuisa Pandolfi (2^parte)*

7 giugno 2022 (Lezione in presenza, docente Marialuisa Pandolfi). 4

238. I: Vediamo l'ultima diapositiva sul jogging, leggetela con attenzione e di nuovo scrivete enti e relazioni, poi ne discutiamo assieme.



239. *Alla lavagna Virginia scrive*:
<u>enti</u>:
10 numero di giri fatti da Alberto
30 numero di m del lato del quadrato
12 numero di giri fatti da Giacomo
20 numero m del lato del quadrato
forma pentagonale
<u>relazioni</u>:
perimetro del quadrato: l×n, n=numero di lati del prato di Giacomo
perimetro del pentagono: l×5
percorso G=percorso A
240. I: Vogliamo scrivere alla lavagna le rappresentazioni che avete pensato?
241. Alla lavagna:

Brando	12×(20×5)=10×(30×n)
Alessia	10×(n×30)=12×(20×5)
Virginia	10×(30×n)=12×(20×5)
Mattia	(30×n)×10=(5×20)×12

242. I: Guardate con attenzione le rappresentazioni, cosa osservate?[51]
243. Merlin: Che sono simili.
244. I: Cioè? Spiegati meglio.
245. Alessia: Sono tutte rappresentazioni diverse ma vogliono dire la stessa cosa.
246. Davide: Cambia la posizione dei numeri, degli enti ma le operazioni fra loro no.
247. I: Ce la facciamo ad essere più precisi? Magari confrontiamo due versioni alla volta. Partiamo dalle prime due.
248. Merlin: Secondo me Brando, prima voleva scoprire il perimetro della figura e poi moltiplicarlo per il numero di giri che Giacomo fa attorno al prato, invece Alessia… mh…
249. Brando: È stata applicata la proprietà riflessiva[52] dell'uguaglianza e la commutativa all'interno delle parentesi tonde e tra Virginia e Mattia la proprietà commutativa.
250. I: Potremmo essere ancor più precisi: di relazioni moltiplicative se ne vedono molte ma non in tutte è stata applicata la commutativa.
251. Brando: Tra Virginia e Mattia la commutativa è applicata al prodotto tra il perimetro del prato di Alberto e il numero di giri e anche tra il perimetro del prato di Giacomo e il numero di giri.
. .[53]

---

[51] *Questa volta sono riusciti a produrre più rappresentazioni rispetto alla situazione precedente (201).*
[52] *Simmetrica.*
[53] *Finisce la lezione purtroppo, e con essa anche l'anno scolastico, non ho calcolato bene i tempi e la trattazione di quest'ultima diapositiva rimane misera.*