28 febbraio 2023 1

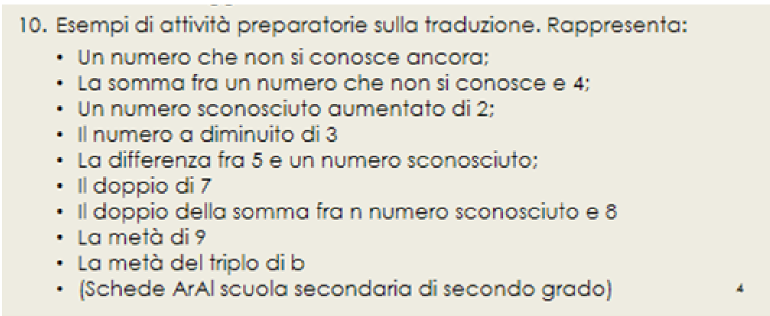
Commenti Insegnante di classe
Commenti Giancarlo Navarra
Commenti Anna Traverso (già docente scuola primaria, esperta ArAl)
Commenti Maria Grazia Della Picca (già docente scuola primaria, esperta ArAl)

PRESENTAZIONE DELLA CLASSE: La classe 2ª A è composta da 26 alunni, 10 femmine e 16 maschi. Sono presenti 8 alunni stranieri, di seconda generazione, quattro alunni con BES e tre alunni con certificazione L.104. La classe è, in generale, attiva, abbastanza attenta e partecipativa ma dimostra un limitato impegno nella rielaborazione individuale dei concetti e/o conoscenze affrontate in classe. Da qualche giorno si è inserito un alunno straniero (uno dei quattro BES) che richiede un percorso di prima alfabetizzazione, uno presenta un PDP e gli altri due un PDP per svantaggio culturale.

PRESENTAZIONE DELL'ATTIVITÀ: Dopo una lezione in classe con il prof.re Giancarlo Navarra sulla rappresentazione di una situazione problematica che prevedeva l'utilizzo di una sola incognita e l'uso della bilancia come strumento risolutivo del problema per saggiare il grado di conoscenza e abilità dei ragazzi sulla traduzione dal linguaggio naturale a quello matematico, sull'individuazione di relazioni, dei processi operativi e delle definizioni e proprietà, si decide di affrontare la rappresentazione di situazioni problematiche che sottintendono l'uso di due incognite a partire da attività propedeutiche come la traduzione dal linguaggio naturale a quello matematico.
L'attività si svolge individualmente con confronto e discussione collettiva delle traduzioni prodotte.

. .[1]

1. *L'insegnante proietta allo schermo la seguente diapositiva, chiedendo di rappresentare in linguaggio matematico le frasi delle attività preparatorie alla traduzione:*



2. I: Ragazzi scrivete ognuno sul proprio quaderno la traduzione della prima frase, poi ognuno legge a voce alta la sua traduzione e eventualmente ci confrontiamo.
3. Safet: s = al numero sconosciuto.

---

[1] Questo diario è il primo che testimonia l'applicazione in una classe del progetto di ricerca avviato nel 2022 all'interno del Progetto ArAl sull''Approccio ai sistemi di due equazioni a due incognite dalla quinta primaria'. Il progetto nasce dal fatto che numerosi docenti rilevavano come nelle prove INVALSI ci fossero numerosi test su problemi risolvibili anche con sistemi di equazioni, e chiedevano di affrontare questo tema. Un esempio:

A nostra conoscenza, il tema non risulta presente in letteratura. La sua analisi ci ha portato a spostare l'attenzione, come approccio, sul versante della traduzione dal linguaggio naturale e quello algebrico e viceversa, argomento ampiamente trattato dal Progetto ArAl. Si è deciso quindi di iniziare predisponendo famiglie di frasi che, sin dalla prima primaria, portassero insegnanti e alunni a riflettere, come preparazione al tradurre, sugli aspetti strutturali e semantici dei due linguaggi. Si è capito ben presto che queste attività sono importanti in sé nello sviluppare il pensiero relazionale, indipendentemente dal fatto che poi si arrivi o meno ai sistemi.
Il diario riguarda una seconda secondaria che lavora dalla prima con la stessa insegnante, esperta in early algebra. È formato da tre trascrizioni ed costituito da due fasi: nella prima vengono proposte delle traduzioni, nella seconda viene presentato un problema che, potenzialmente, apre ad un sistema. Come risulterà evidente dalla lettura, gli alunni sono abituati ad argomentare in modo molto chiaro e competente e a confrontarsi fra loro; conoscono costrutti come le dualità rappresentare/risolvere, trasparente/opaco *e la* rappresentazione canonica e non canonica di un numero*; si mostrano competenti nel riferirsi alla bilancia a piatti e quindi all'equazione e ai suoi princìpi.*

4. Muhammed: Ho fatto come Safet solo che ho messo n come numero sconosciuto.
5. I: Ci sono versioni diverse?
6. Alunni: No, a parte aver indicato il numero sconosciuto con lettere diverse.[2]
7. I: Ok, allora possiamo passare alla seconda frase, qualcuno la legga.
8. *Costanza legge la frase n.2:* 'La somma fra un numero che non si conosce e 4'.
9. Carlotta: Ho scritto 4+a dove a rappresenta il numero sconosciuto.
10. Safet: Casomai dovrei mettere a+4=n, poi ho scritto a = numero sconosciuto con n = risultato della somma tra un numero sconosciuto e 4.
11. I: Confrontiamo le due traduzioni:

4+a e a+4=n

12. Davide: Scrivere l'incognita n come risultato della somma non è molto corretto perché ci chiede di rappresentare non di mettere il risultato.
13. Costanza: Io volevo dire ciò che ha detto Davide, n rappresenta una lettera in più, al momento non ci serve.
14. Davide: È più giusta quella di Safet a+4 perché il comando chiede la somma di un numero sconosciuto con 4.
15. Costanza: La traduzione di Carlotta era giusta se la frase in linguaggio naturale fosse stata la somma di 4 e un numero sconosciuto.
16. Emanuele: Comunque tra le due è stata applicata la proprietà commutativa.
17. I: Da un punto di vista aritmetico non cambia, è chiaro quindi che la versione di Safet limitata a a+4 rappresenta una traduzione più fedele[3].
18. *Affrontiamo la prossima frase*: 'Un numero sconosciuto aumentato di 2*'.*
19. Anna: a+2 dove a è il numero sconosciuto.
20. Safet: Praticamente è la stessa cosa della frase precedente perché al posto di dire la somma si usa 'aumentato', il termine fa capire che i due numeri vanno comunque sommati.
21. I: Provate a parafrasare la frase.[4]
22. Safet: La somma di un numero sconosciuto e 2.
23. Mohammed *legge*: 'Un numero a diminuito di tre'. Ho scritto a-3.
24. I: Gli altri?
25. Alunni: Abbiamo fatto uguale.
26. I: Parafrasate.
27. Davide: La differenza fra un numero sconosciuto a e tre.
28. *Si passa alla frase*: 'La differenza fra 5 e un numero sconosciuto'.
29. Muhammed: 5-a.
30. Safet: Il numero cinque sottratto al numero sconosciuto.
31. Gli altri alunni: Nooo!
32. I: Scrivi alla lavagna, Safet.
33. Safet: Ah!... Deve essere n-5.
34. Muhammed: No! Non è così perché la frase 'La differenza fra 5 e un numero sconosciuto' richiede un risultato, cioè 5–a=n. Invece la frase 'Il numero 5 diminuito di un numero sconosciuto', no e dovrei scrivere solo 5-a.
35. Safet: Non sono d'accordo, non si deve mettere uguale n altrimenti nella frase ci dovrebbe essere scritto 'La differenza fra 5 e un numero sconosciuto è uguale ad n'.[5]
36. Emanuele: Si potrebbe scrivere anche: 'Rappresenta 5 diminuito di un numero sconosciuto'.[6]
37. Muhammed: Ma penso sia sbagliato; dovresti scrivere il risultato tra la sottrazione tra 5 e un numero sconosciuto[7].
38. I: Muhammed, che cosa intendi per 'il risultato tra la sottrazione tra 5 e...?
39. Muhammed: No! Dovrei scrivere il risultato della sottrazione tra 5 e un numero sconosciuto.

---

[2] *Bella conclusione. Sembra banale, ma in realtà mostra la competenza degli alunni verso l'uso della lettera in sé, indipendentemente da quella scelta, che può essere diversa da alunno ad alunno.*

[3] *Qua dovevo insistere di più sull'uguaglianza ad n e sottolineare l'aspetto risolutivo che il quesito non poneva. Qui si potrebbe anche esplicitare la distinzione fra* semantica della situazione *(implicita nel testo della consegna) e* semantica della matematica *(come dice Emanuele (16): "È stata applicata la proprietà commutativa"). La distinzione è stata introdotta per dirimere con docenti e alunni la delicata questione dell'attribuzione di significato a due rappresentazioni in linguaggio matematico, formalmente diverse, di una stessa frase espressa in linguaggio naturale (per gli approfondimenti v. 'NAV-Cap.IV.6, pag 221 e segg).*

[4] *Ottima domanda. Favorisce la riflessione sulla struttura della frase proposta (18).*

[5] *Safet dimostra di aver compreso l'osservazione precedente e di aver almeno intuito quando si deve fermare ad una rappresentazione relazionale piuttosto che procedurale.*

[6] *Bravo.*

[7] *Muhammed ancora non discrimina tra rappresentare e risolvere.*

40. I: Ok, meglio la costruzione della frase, ma sei sicuro che il quesito ti chieda il risultato?[8]
41. Carlotta: Ma lui sbaglia perché calcola il risultato della differenza e fa l'operazione, va nella parte risolutiva e allora dovrebbe essere scritto 5–a=n.
42. Safet: La prima frase secondo lui rispecchia più una risoluzione perché la frase non gli chiede di calcolare la differenza, la sua traduzione sarebbe corretta se la frase fosse "Calcola la differenza tra 5 e numero sconosciuto".
43. I: Ci sono altre osservazioni?[9] Allora traduciamo la frase 'Il doppio di 7'.
44. Costanza: 7×2.
45. Anna: Io ho tradotto 2×7.
46. Emanuele: Secondo me è sbagliato perché nella consegna ci dovrebbe chiedere 'Il settuplo di due'.
47. Costanza: Anna e Emanuele dicono la stessa cosa perché entrambi hanno messo come soggetto il 2, invece nella frase 'Il doppio di sette' il soggetto è 'il doppio'.
48. Carlotta: Io dico che è sbagliata la prima.
49. I: Ognuno di voi deve provare a spiegare la propria posizione non limitandosi a dire è giusta o sbagliata ma: la traduzione è giusta perché…
50. Safet: È giusta 7×2 perché se parafrasiamo la seconda (2×7) dovremmo scrivere il prodotto tra due e sette, invece la parafrasi della prima è 7×2.
51. I: Più che parafrasi userei il termine traduzione in linguaggio naturale.
52. Davide: Per me non c'è differenza perché è stata applicata la proprietà commutativa.
53. Carlotta: È più giusta la seconda perché la frase inizia con 'il doppio di' e il soggetto è il doppio.
54. Safet: Ma manca il verbo quindi non si può capire, e comunque è sempre 7 che deve essere raddoppiato.
55. Emanuele: Se io andassi a tradurre 2×7 scriverei il doppio che sta per 2× e poi 7 che è ciò che ci chiedono di raddoppiare.
56. I: Vediamo se riusciamo a far chiarezza: proviamo a riempire la tabellache chiarisce le azioni che possiamo fare su un numero n qualsiasi (nel nostro caso potrebbe essere il 7) a partire da quest'ultima traduzione che ha scatenato la discussione:

Verbo che agisce sul numero n (*azione da compiere sul numero)*	Sostantivo *(si 'sostantiva il verbo')*	Come si rappresenta	Altra forma
Duplicare n	doppio		

57. I: *Gli alunni intervengono proponendo facilmente le frasi delle prime tre colonne, mentre per il riempimento della quarta colonna (altra forma) è necessario ricordare quale altra forma non canonica potrebbero scrivere e come hanno scoperto la moltiplicazione alla scuola primaria. Si giunge a questa compilazione:*[10]

Verbo sul numero n (*azione da compiere sul numero)*	Sostantivo *(si 'sostantiva il verbo')*	Come si rappresenta	Altra forma
Duplicare n	doppio	2×n	n+n
Triplicare n	triplo	3×n	n+n+n

[8] *Se ho interpretato bene il pensiero di Muhammed, ritengo che lui associ la parola "differenza" al risultato dell'operazione stessa come definizione aritmetica imparata alla scuola primaria sui termini di una operazione: minuendo, sottraendo e differenza.*

[9] *Avrei dovuto sottolineare la differenza di significato della "differenza" in aritmetica e in algebra. Mi soffermo sull'episodio (28-42) perché contiene numerosi spunti di interesse:*
(33-37) Cinque interventi significativi di alunni supportati da argomentazioni ben costruite sono un evento raro, e va a favore della didattica praticata dall'insegnante e dalla condivisione chiara ed efficace del contratto didattico..
(29-33) La traduzione è 5-a o a-5? Direi che l'analisi della struttura della frase originale dovrebbe portare a capire che la 'differenza' è fra un primo termine (il minuendo 5) e un secondo termine (il sottraendo, che è un numero sconosciuto) e che quindi la traduzione letterale è '5-a' (per approfondimenti: NAV-Cap.IV.6-pp.222-223).
(34-42) È corretto parlare di 'risultato'? Sarebbe importante aprire una breve 'philosophical discussion' che porti a chiarire il senso della consegna Rappresenta*, comune a tutte le traduzioni. Gli alunni stanno mostrando di possedere gli strumenti necessari per affrontare i temi del diario ma è ancora forte (siamo in pieno* balbettio algebrico*) un retropensiero procedurale che fa emergere il 'bisogno di conclusione'; Muhammed (34) in questo senso è chiarissimo. Gli alunni devono capire (e direi che sono pronti per farlo, trovandosi in una zona prossimale) che le due parafrasi esprimono con termini diversi ('differenza', 'diminuito') la stessa relazione additiva che si chiede di rappresentare.*

[10] *Trovo molto efficace l'uso della tabella, così come viene proposta, in particolare l'espressione 'si sostantiva il verbo' mi pare renda molto bene l'idea del passaggio dalla verbalizzazione alla nominalizzazione, conquista difficile, anche per alunni della scuola secondaria, ma indispensabile per impadronirsi del linguaggio formale della matematica.*

Quadruplicare n	quadruplo	4×n	n+n+n+n
Quintuplicare n	quintuplo	5×n	n+n+n+n+n
Sestuplicare n	sestuplo	6×n	n+n+n+n+n+n
Settuplicare n	multiplo secondo sette e non settuplo	7×n	n+n+n+n+n+n+n
Moltiplicare per n	Multiplo secondo a di un numero n		a×n

58. Costanza: Allora ha ragione Anna!!![11]
59. I: Passiamo alla frase 'Il doppio della somma fra un numero sconosciuto e 8'.
60. Meldin: (a+8)×2.
61. Safet: 2×(a+8).
62. Alunni: Mh…
63. Safet: Ah! si ripresenta la stesso problema di prima quindi… dobbiamo raddoppiare la somma tra n e 8 cioè: (a+8)×2.[12]
64. I: Safet, non sei tu il soggetto della frase, cioè non sei tu che devi raddoppiare una quantità.
65. Costanza: No, Safet, avevi detto bene tu la prima volta, riguarda anche la tabella che abbiamo fatto.

[11] *Anche l'episodio (43-58) è molto interessante ed è ben guidato dall'insegnante, che sviluppa in modo chiaro, con l'aiuto della rappresentazione tabulare, il dubbio su quale fra 7×2 e 2×7 sia la traduzione di 'Il doppio di 7'. La prima (7×2) esprime una visione tradizionale della moltiplicazione, che porta a vedere 'il doppio di un numero' come l'operatore '×2' applicato a un qualunque numero naturale. La seconda (2×7) antepone l'operatore 2 rispetto al numero su cui esso agisce: è in questa direzione che è opportuno procedere anche perché apre la strada alla generazione del concetto di multiplo (per approfondimenti: NAV-Cap.IV.5-pp.211 e segg.).*

[12] *Safet ha le idee ancora un po' di confuse. Per fortuna Costanza lo corregge e gli fa notare come la sua prima traduzione fosse quella giusta.*

7 marzo 2023 2

Si riprende dalla seguente diapositiva, i ragazzi traducono sul proprio quaderno e poi si confrontano sulle traduzioni:

- L'età di Marco oggi;
- L'età di Marco fra dieci anni;
- L'età di Marco sei anni fa;
- L'età di Rita, sorella di Marco, oggi, sapendo che ha la metà dei suoi anni;
- L'età del papà di Marco, oggi, sapendo che ha otto volte i suoi anni;

66. Carlotta: Ho tradotto *m* = l'età di Marco oggi.
67. I: Qualcuno ha scritto diversamente? *Silenzio.* Intendo qualcuno ha specificato meglio?
68. Carlotta: Beh!... posso scrivere *m* che è al numero di anni di Marco.
69. Davide: Io ho scritto 'e' come età e 'e_m' per l'età di Marco.
70. Emanuele: Davide usa troppe lettere che non ci servono, potremmo fare a meno di una lettera ed usarne solo una: *m*.
71. Davide: In effetti io non conosco solo l'età di Marco quindi è sufficiente una lettera.
72. I: Bene, se ti sei convinto andiamo avanti alla successiva: L'età di Marco fra 10 anni.[13]
73. Anna: *m*+10 dove *m* è l'età di Marco.
74. I: Tutti sono d'accordo?
75. Alunni: Sì! D'accordo.
76. I: La successiva: 'L'età di Marco sei anni fa'.
77. Carlotta: Ho tradotto con *m*–6.
78. I: La successiva: 'L'età di Rita, sorella di Marco, oggi, sapendo che ha la metà dei suoi anni'.
79. Safet: Io ho messo r=n° [14] anni di Rita, r=*m*/2 che sarebbe il numero degli anni di Rita sono uguali al numero di anni di Marco fratto 2, cioè il numero degli anni di Rita sono uguali alla metà degli anni di Marco.
80. Davide: Ora va bene, sono d'accordo ma si poteva anche scrivere r=m:2. Il soggetto della frase sono gli anni di Rita cioè r e ora si capisce che sono uguali alla età di Marco divisi per due, scrivendo solo m:2 non era chiaro.
81. Costanza: Bisogna stare attente alla parola 'oggi' perché se non si mette r, si deve fare la differenza cioè… se non metto r potrei intendere quanti anni aveva Marco tot anni fa.
82. Safet: Prof secondo me potrebbe anche essere che Rita ha la metà degli anni oggi o in un altro momento ma se si mette r = età di Rita oggi, non ci si sbaglia.
83. Carlotta: Se non si mette la r, da *m*:2 non si riesce a capire a chi collegare gli anni di marco diviso 2.
84. Emanuele: A Brioshi non interessa sapere che cosa è *r,* solo che gli anni di Rita possono essere rappresentati con m:2.
85. Davide: Ma se non specifichiamo r ci potremmo riferire all'età di Rita anni fa[15].
86. I: Scusate, se aveste avuto da tradurre la frase 'L'età di Rita, sorella di Marco, sapendo che ha la metà dei suoi anni' come avreste fatto?
87. Davide: Mah…
88. I: A noi cosa interessa rappresentare?
89. Safet: Quindi prof a noi interessa esprimere solo l'età di Rita e cioè solo con *m*:2, è come l'esempio di prima. La rappresentazione r=*m*/2 è più risolutiva. Io posso risolvere r=*m*/2 ma non *m*/2.
90. I: Quindi stai dicendo, se ho capito bene, che se tu mandi a Brioshi *m*/2 lui non può risolverla, se invece gli spedisci: r=*m*/2, lui è in grado di calcolare la risoluzione.
91. Safet: Ho bisogno di conoscere l'età di Marco allora posso poi trovare l'età di Rita.
92. I: Quindi Brioshi come si deve comportare?
93. Safet: Prima deve riuscire a capire l'età di Marco poi dopo trova l'età di Rita.
94. I: Allora ti pongo la domanda di prima con le conoscenze che hai, quelle date dal testo puoi risolvere la situazione?
95. Safet: No.[16]

---

[13] *Quando l'insegnante ne ravviserà l'opportunità, potrà anche chiarire che in matematica è frequente l'uso di pedici.*

[14] *È solo un dettaglio: suggerisco di invitare gli alunni a riservare la rappresentazione 'n°' ai numeri civici spiegando che, per convenzione, non si usa in matematica.*

[15] *I ragazzi sono presi dal dire le loro opinioni e io mi trovo in difficoltà nel condurre/moderare la discussione.*

[16] *Episodio (78-95): Dal punto di vista linguistico gli alunni argomentano confermando la grande confidenza con la pratica della discussione collettiva anche quando devono esprimersi su questioni interpretative tutt'altro che banali. Dal punto di vista matematico si stanno confrontando con un ambiente che ancora non conoscono: quello delle* funzioni, *e danno quindi due possibili traduzioni, una con una sola lettera: m/2 (o m:2) e una con due lettere r=m/2. Safet esprime con chiarezza il suo pensiero in merito alle due scritture in due occasioni: (89) "La rappresentazione r=*m*/2 è più risolutiva. Io posso risolvere r=*m*/2 ma non* m/2*" (la r vista come risultato) e (93) "Prima deve riuscire a capire l'età di*

96. I: Facciamo l'ultima frase: 'L'età del papà di Marco, oggi, che ha otto volte i suoi anni.[17]
97. Muhammed: Io rappresenterei l'età del papà di Marco con p, poi p=m×8 e m è uguale al numero di anni di Marco oggi.
98. Anna: Io non metterei il p, si chiede solo di rappresentare quindi è sufficiente m×8.
99. Safet: È la stessa situazione dell'altra volta cioè del doppio di sette dove si è tradotto 2×7, quindi anche qui dovrei mettere 8×m.
100. I: Traducetelo in linguaggio naturale utilizzando il verbo e poi il sostantivo.
101. Alunni: Moltiplicare per otto… e il multiplo secondo 8 dell'età di Marco.[18]
102. I: Benissimo! Adesso passiamo a rappresentare questa situazione:

> *Elisabetta e Giacomo sono fratelli e insieme possiedono 46 euro; Elisabetta ha 4 euro meno di Giacomo.*
> *Rappresenta le quantità in gioco e le relazioni tra di esse.*

103. Giovanni: Io ho messo questi enti:
    - 46 euro che sono i soldi che hanno Elisabetta e Giacomo;
    - 4 euro soldi che Giacomo ha in più di Elisabetta;
    - Rappresenta
    - Relazioni.[19]
104. Davide: Io ho fatto così:
    g = n° euro di Giacomo
    e = n° euro di Elisabetta
    g+e =46 euro totali
    e=g–4
    e poi rappresenta.
105. Safet: Io sono d'accordo con Davide, solo io ho messo al posto di e, s_e cioè soldi di Elisabetta…
106. Davide: Ma si sbaglia, è lo stesso di prima, basta una lettera.
107. Safet: Allora scrivo:
    g = n° euro di Giacomo
    e = n° euro di Elisabetta
    g+e=46 euro totali
    g–4=e.
108. Emanuele: Secondo me dobbiamo unirle in una unica rappresentazione.[20]
109. I: Aspetta un attimo, su questa osservazione ci torniamo dopo.
110. Greta: Se a Brioshi mandiamo solo g+e=46 non risolve, gli manca una informazione importante g–4=e.[21]
111. I: Ottima osservazione Greta!
112. Carlotta: Io ho scritto 46=(g-4)+g.[22]

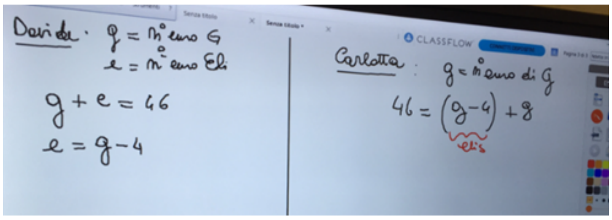
Marco poi dopo trova l'età di Rita" (detto in altri termini: prima bisogna assegnare un valore alla variabile indipendente e, di conseguenza, si trova quello della variabile dipendente). Si ritorna alla necessità di riflettere collettivamente sulla differenza fra risolvere *e* rappresentare*. Per Safet, e probabilmente per molti dei suoi compagni, in r=m/2 la lettera r in qualche modo 'anticipa' il risultato della divisione fra m e 2: una volta che conosci m, trovi r. Bisogna – nel corso della stessa o di un'altra philosophical discussion - aiutare a superare la concezione procedurale verso una concezione relazionale.*
Schematizzo:

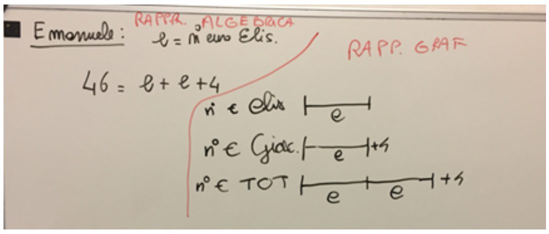
r	=	m/2
risultato (quoziente)	operatore direzionale 'capovolto'	operazione (divisione)
soggetto	copula (è – è uguale a)	parte nominale del predicato

[17] *Dovevo spiegarmi meglio, non fermare così la discussione. Sono d'accordo.*
[18] *È bellissimo vedere come la classe esprima un'elevata* intelligenza sociale*. Sono sempre più convinto che* l'intelligenza sociale *– come espressione non di un individuo solo, ma di un organismo articolato –* fornisca un (probabilmente il) contributo decisivo anche alla costruzione delle competenze in ambito matematico.
[19] *Non ho capito bene cosa intendesse per 'relazioni', è intervenuto subito Davide e quindi mi è passato di chiedere il significato di 'relazioni' a Giovanni.*
[20] *Intuizione 'geniale'.*
[21] *Passaggio chiave, passo intermedio fra l'intuizione e la rappresentazione.*
[22] *Rappresentazione ineccepibile.*

Si riprende la lezione dalla rappresentazione di Davide.

113. Anna: Dalla rappresentazione di Davide toglierei euro, l'unità di misura, a Brioshi non importa[23].
114. *Si proiettano e si scrivono sullo schermo e sulla lavagna le tre forme di rappresentazioni proposte dai ragazzi per una discussione collettiva sulle tre diverse equazioni algebriche individuate:*[24]





113. Emanuele: Per far capire la mia rappresentazione algebrica io avrei pensato a rappresentare graficamente il numero di euro con un segmento[25], poi con un segmento uguale più 4 euro, quelli di Giacomo e infine gli euro dei due ragazzi si rappresentano con due segmenti uguali più 4. Quindi, se i due segmenti sono uguali li chiamo con la stessa lettera ad esempio *e*, quando vado a rappresentare la somma dei due scriverò *e+e+4*.
114. Duccio: Abbiamo la rappresentazione grafica e quella algebrica.[26]
115. I: Adesso ditemi che ne pensate delle tre rappresentazioni.
116. Davide: Secondo me la mia rappresentazione non è del tutto giusta perché lei ci dice sempre di usare meno lettere possibili e io, a differenza di Carlotta e Emanuele, ne ho usate due.[27]
117. Carlotta, Safet e Duccio: Non è sbagliata.
118. I: Perché?
119. Emanuele: Secondo me non è sbagliata ma se la vado a rappresentare con la bilancia è un po' complessa, nella bilancia non si può rappresentare il -4.
120. I: Devo fare una precisazione: non tutte le rappresentazioni possono poi essere risolte con l'utilizzo della bilancia, questo non vuol dire che la rappresentazione sia sbagliata ma soltanto che per questo tipo di rappresentazione la bilancia non ci può venir in aiuto. Intendo dire che la bilancia come strumento che ci deve aiutare per risolvere le rappresentazioni o equazioni (d'ora in avanti le potremmo chiamare così) talvolta non ci è d'aiuto e quindi si deve ricorrere ad altre strategie. Concludendo, se non si può rappresentare una equazione con una bilancia, ciò non ci assicura che la rappresentazione sia sbagliata.
121. Safet: Secondo me la rappresentazione di Davide è utile per far capire meglio il problema ma in un momento di risoluzione sarebbe più utile quella di Emanuele.
122. I: Allora la rappresentazione di Davide è corretta oppure no?
123. Carlotta: È giusta.
124. Davide: È giusta ma quando la andiamo a risolvere ci incasina un po', due lettere ci incasinano di più di una[28].

---

[23] *Qui potevo intervenire precisando che l'unità di misura non è una conoscenza fondamentale per Brioshi, in quanto lui deve solo risolvere per trovare i numeri che corrispondono ad e e g, non sta a lui attribuirgli un significato o contestualizzarli. In altre lezioni affrontate con la classe, una volta individuata la rappresentazione di una situazione problematica assegnata, ho chiesto di fare il processo inverso: data la rappresentazione costruire un possibile testo, poi i testi prodotti li abbiamo condivisi alla LIM e discussi. Forse per alcuni di loro non è stato sufficiente. I passaggi esposti nel commento confermano la concezione unitaria che l'insegnante sta elaborando da anni nella costruzione di una didattica costruita nella prospettiva dell'early algebra.*

[24] *Mi complimento ancora con l'insegnante: sta confermando, con questo diario, come una classe ben educata sul piano dell'argomentazione e del pensiero relazionale, appoggiandosi alle riflessioni scaturite (i) da attività centrate sulla traduzione e (ii) dalle esperienze maturate con la bilancia a piatti, sia in grado di capire autonomamente (v. (108-110-112 alla fine del diario precedente) la necessità di collegare delle informazioni per ottenere un'unica rappresentazione risolutiva che, al momento opportuno, assumerà il nome istituzionale 'sistema di equazioni'.*

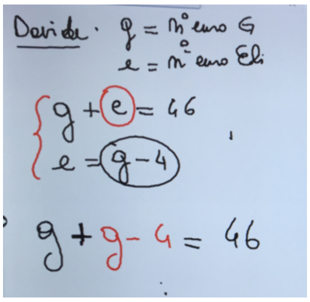
[25] *Emanuele costruisce un'argomentazione completa sul suo protocollo. A proposito del ricorso alla rappresentazione con i segmenti invito, chi non lo conoscesse, a leggere l'articolo di* Antonella Castellini A. (2016). Against problem solving by segment method (articolo in italiano). *Edimast*, rivista on line. 287-302. *Mi colpisce molto la capacità di argomentare di Emanuele e dei suoi compagni e il loro coinvolgimento nell'attività. Credo che l'insegnante possa esserne molto soddisfatta.*

[26] *Considerazione che esprime la competenza certamente di Duccio, ma probabilmente anche di altri compagni.*

[27] *Davide è un ragazzo insicuro e si pone sempre in discussione, riesce ad avere buone intuizioni ma poi si perde nel controllo del problema. Però ha ragione: due lettere incasinano più di una…*

[28] *Fantastico! Spero che al termine del nostro lavoro con ArAl si possa ricredere. Concordo col commento dell'insegnante. Battuta efficace e molto azzeccata!*

125. Safet: A Brioshi dobbiamo mandare quella di Davide ma un po' più dettagliata.
126. I: In che senso dettagliata?
127. Safet: Un modo di tradurre il numero degli euro di Elisa senza esprimerli con una lettera.
128. Davide: Allora è la rappresentazione di Emanuele. Per usare una sola lettera non possiamo mettere la sottrazione, come facciamo ad esprimere la sottrazione con una sola lettera?
129. I: Aspetta Davide ragiona bene sulla tua rappresentazione della relazione fra *e* e *g*. *g+e=46* che tipo di relazione è?
130. Davide: Additiva.
131. I: Ok e 46 che cosa rappresenta?
132. Davide: 46 è il numero di euro totali.
133. I: Ok, ma se lo pensi come numero in che forma si presenta?
134. Davide: Ah! Sì! In forma canonica e *g+e* è la sua forma non canonica.[29]
135. I: Benissimo. Ora guarda con attenzione la seconda relazione che hai scritto e=g–4, e che cosa rappresenta?
136. Davide: e è il numero di euro di Elisabetta.
137. I: Ok, e che forma ha?
138. Davide: È in forma canonica e *g–4* in forma non canonica.
139. Safet: Sia *e* che *g-4* rappresentano la stessa cosa, potremmo togliere *e* dalla seconda relazione: *e=g-4* e trovare un modo di aggiungere *g-4* alla relazione *e+g=46.*[30]
140. Duccio: Come? Che viene fuori?[31]
141. I: Scrivete alla lavagna.
142. Safet: e+g+g-4=46.
143. Emanuele: No! Si prende *g-4* che è uguale ad *e*, e lo si va sostituire al posto della *e* nella relazione *e+g=46* così viene *g+g–4=46:*



144. Carlotta: È quello che ho scritto io![32]

[29] *La domanda 'potente' (133) dell'insegnante (riproposta in 135-138 con e=g-4) apre ad una lettura molto evoluta della frase g+e=46 come uguaglianza fra due rappresentazioni dello stesso numero (46) in forma non canonica (g+e) e canonica (46). Questa scoperta permette ad Emanuele (143) di introdurre il termine sostituire per indicare che mette 'g-4' al posto di 'e', e di aprire quindi la strada all'idea di sistema. Aggiungo un'ulteriore riflessione. Il frammento che si sviluppa da questi interventi dell'insegnante è un bell'esempio di* devoluzione. *L'invito a 'scrivere alla lavagna' dà origine ad un ricco dialogo (138-153) in cui gli alunni ragionano sulle rispettive rappresentazioni, le mettono a confronto con competenza, ne valutano la correttezza e l'appropriatezza, anche in vista di una possibile soluzione. Brioshi è sullo sfondo, ma l'idea che la rappresentazione debba consentire al risolutore di arrivare alla scoperta delle due incognite, appare molto chiara nei loro interventi. Mi sembra che l'obiettivo di creare alunni metacognitivi sia stato pienamente raggiunto, almeno per quella parte di allievi coinvolta nella discussione. Sarebbe interessante avere un'idea del grado di partecipazione all'attività per il resto della classe.*
[30] *Pensavo avesse usato il termine aggiungere per dire sostituire, invece dopo scrive e ci fa capire che ha perso il controllo della situazione. Sì: l'intuizione c'è, ma poi non sa concretizzarla: è la classica situazione in cui, mancando il controllo semantico, si commette un errore sintattico.*
[31] *Duccio è più vispo di me.*
[32] *Non è affatto semplice quello che scopre Carlotta confrontando la sua scrittura con quella di Emanuele (143), e cioè che esse sono equivalenti:*

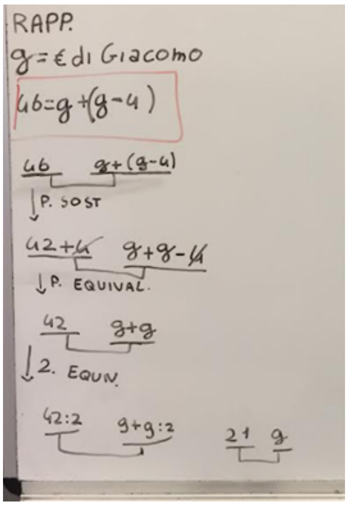
(Carlotta) 46=(g-4)+g (Emanuele) g+g-4=46

*Le differenze formali non sono banali, ma sono esplicitate chiaramente dall'intervento successivo di Giovanni (141). È necessaria una grande esperienza da parte degli alunni per individuarle, e questo conferma come le competenze maturate dalla classe nell'*interpretare *e nel* confrontare *le scritture matematiche sia la condizione necessaria affinché essi individuino autonomamente gli interventi sintattici* produttivi *(per esempio quello che, a tempo debito, verrà definito come 'principio di sostituzione'). Gli alunni diventano così, nel vero senso del termine,* produttori di pensiero matematico *(per approfondimenti: NAV-Cap.I.6).*

145. Giovanni: Nella rappresentazione di Davide non ci sono parentesi, mentre in quella di Carlotta ci sono, non sono però fondamentali, e poi si è scambiato l'ordine degli addendi.
146. Carlotta: Ma io ho pensato che scrivere prima 46 è più vicino al testo.
147. I: Intendi hai cercato di fare una traduzione più fedele al testo?
148. Carlotta: Sì perché il testo inizia che Elisabetta e Giacomo insieme possiedono 46 euro e poi continua dicendo che Elisabetta ha 4 euro meno di Giacomo.
149. Emanuele: Per me, sono entrambe giuste ma se andiamo a vedere la traduzione più fedele è quella di Carlotta.[33]
150. I: Considerate che alla forma $g+g-4=46$, Davide ci è arrivato partendo dal sistema delle due relazioni per tentare di risolverlo, invece Carlotta ha rappresentato il problema direttamente con $46=g-4+g$.
151. Safet: Carlotta va più verso la risoluzione.
152. I: Direi che questa osservazione è giusta[34] ma possiamo accettare sia la rappresentazione di Carlotta, sia di Emanuele sia quella iniziale di Davide.
153. Safet: Allora la traduzione di Davide è proprio uguale al testo!
154. I: Che cosa intendi?
155. Safet: Che Davide traduce precisamente il testo.
156. Emanuele: Cioè è più fedele. Davide ha messo in evidenza bene le relazioni. E tra la mia e quella di Carlotta è migliore quella di Carlotta perché più fedele al testo.
157. I: Va bene, ma è una questione sottile, possono essere accettate tutte e tre le rappresentazioni per mandarle a Brioshi:

Davide:	Carlotta:	Emanuele:
$\begin{cases} g+e=46 \\ e=g-4 \end{cases}$	$46=(g-4)+g$	$46=e+e+4$

Proviamo ora a risolvere le tre rappresentazioni, mettetevi nei panni di Brioshi partendo da quella di…
158. Alunni: … da quella di Davide.
159. Safet: Io proverei a risolverla con la bilancia. Sul piatto di destra $g+e$ su quello di sinistra 46 per il principio di equilibrio. Poi applico il principio di sostituzione e sul piatto di sinistra metto $46-4$ e... No, aspetti!
160. *Gli chiedo di scrivere alla lavagna ciò che ha scritto sul proprio quaderno:*



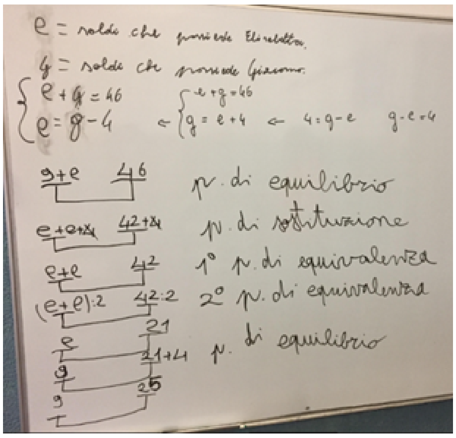
161. Emanuele: No! Secondo me non si può risolvere con le bilance; visto che sappiamo che $e=g-4$ e $e+g=46$, allora si ha che $g+g-4=46$, levo…
162. I: Fermati un attimo, dopo ci spieghi perché non si può risolvere con la bilancia, ma ora facci capire bene come sei arrivato a $g+g-4=46$ partendo dalle due equazioni $e=g-4$ e $e+g=46$.
163. Emanuele: Ho sostituito la forma canonica di *e* nella rappresentazione $e+g=46$ con la non canonica di *e* cioè $g-4$ così si ha $g+g-4=46$.

---

[33] *Questo è un tema che ricorre, forse quando siamo andati a fare le traduzioni iniziali ho calcato troppo la mano e adesso questo bisogno di essere estremamente fedeli al testo si rivela come una difficoltà o fissità. Vedo i microepisodi (142-145) e (149-152) più positivamente, come due dei tanti momenti a cavallo fra semantica e sintassi, fra semantica della situazione e semantica della matematica, fra rappresentare e risolvere, che caratterizzano la progressiva evoluzione del balbettio algebrico così evidente in questa classe.*

[34] *Penso che l'insegnante dica questo non perché sia convinta dell'osservazione di Safet (147), ma perché preferisce (giustamente) non interrompere l'importante flusso dell'attività che sta contribuendo a costruire.*

164. I: Allora alla luce di quanto hai detto, rivediamo se possiamo impostare la bilancia come ipotizzava Safet.
165. Emanuele: Con la rappresentazione di Davide, come ha scritto Safet, su un piatto c'è un peso negativo -4 che non può esistere invece se al posto di *e=g–4* io scrivo *g=e+4* poi lo sostituisco a *g* torna meglio e si può usare la bilancia.[35]
166. *Viene alla lavagna e scrive:*

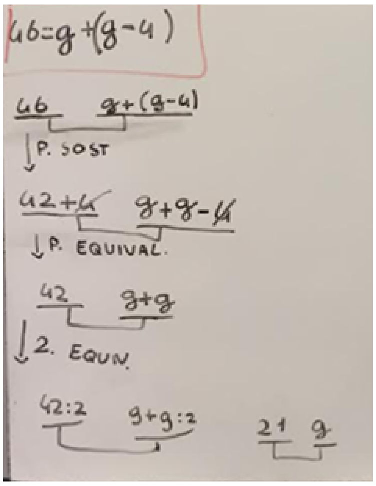


167. I: Gli altri sono d'accordo? E ciò che ha detto Emanuele è chiaro?
168. Alunni: Sì...
169. *Li guardo e alcuni di loro sembrano perplessi.*
170. I. Non vi vedo convinti.
171. Anna: Prof, Emanuele ha usato la rappresentazione *g=e+4* che non era la traduzione del testo vera e propria però poi gli torna bene per risolvere con la bilancia.
172. I: Hai ragione, ma pensa: *e=g–4,* che come dici tu, è la 'traduzione vera e propria', cioè più fedele al testo, esprime o no lo stesso concetto della traduzione che *g–4=e* è la differenza di euro tra Giacomo ed Elisabetta o che Giacomo ha 4 euro in più di Elisabetta *g=e+4*?
173. Anna: È vero! Ma pensavo dovessimo prendere *e=g–4*.
174. I: Sono tre traduzioni diverse dello stesso concetto e tutte e tre corrette[36]. Ritorniamo però alla bilancia di Safet e vediamo di ragionarci sopra. Oltre al fatto che su una bilancia non può esistere un peso negativo come aveva detto poco fa Emanuele, in un passaggio che ha riportato Safet c'è qualcosa che non convince:

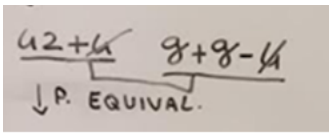
---

[35] *Emanuele con la sua proposta 'g=e+4' (161) ovvia in modo elegante all'impossibilità di mettere sulla bilancia un 'peso negativo' e più avanti l'insegnante porterà gli alunni a scoprire che è possibile sfruttare i principi di equivalenza anche in quelle che lei chiama 'le bilance impossibili' (189). La questione sollevata qui e anche in (119-120) mi ha suscitato questa riflessione: il concetto di 'forma non canonica' di un numero apre alla possibilità di molteplici rappresentazioni e in una bilancia metaforica anche la scrittura 'g-4' può legittimamente stare su un piatto, in quanto la si può immaginare come numero e non solo come differenza tra un numero sconosciuto e 4. L'idea delle 'bilance impossibili' mi piace molto e credo solleciti a superare un'immagine della bilancia come sistema di pesi in equilibrio, utile nella prima fase di approccio alle equazioni e alla loro risoluzione, e a considerarla nella sua dimensione astratta, come un possibile modo di rappresentare un'equazione, cosa che del resto l'insegnante arriva a fare nelle ultime battute del diario.*

[36] *Mi rendo conto che non sono stata incisiva e non so fino a che punto ho tolto le sue perplessità. L'attività è ricchissima e tutt'altro che semplice da gestire. Sinora la conduzione è stata molto efficace: la reale difficoltà che l'insegnante sta affrontando non è tanto quella di perseguire il suo obiettivo, ma di cercare di mantenere la rotta adattandosi nei modi più produttivi alla grande vitalità degli alunni, e questo ruolo è delicato in termini generali. Desidero far notare ai lettori di questo diario che risultati produttivi di questo genere sono il frutto non di interventi sporadici da parte di un docente, ma di un contratto didattico che vede al centro dell'attività la maturazione di capacità a livello metacognitivo e metalinguistico come* argomentare, interpretare, confrontare, tradurre *(per approfondimenti: NAV-Cap.I.3).*



175. Giovanni: Nella seconda bilancia toglie +4 con –4 ma non sono lo stesso peso.[37]
176. I: Allora come potremmo fare? Pensate alle azioni che potreste compiere in una bilancia così fatta ma che non turbino l'equilibrio.
177. Alunni: Mh…
178. I: Suggerimento, e non dovrei darlo, pensate a cosa asserisce il primo principio di equivalenza.[38]
179. Duccio: Se si tolgono pesi uguali a destra e sinistra, la bilancia è in equilibrio.
180. I: Duccio riprova a fare una frase completa e per bene.[39]
181. Duccio: Il primo principio dice che, se si tolgono pesi uguali a destra e a sinistra, la bilancia è in equilibrio.
182. I: Tutti convinti?
183. *Gli alunni non si azzardano a dare una risposta in quanto hanno letto fin troppo bene nella mia ultima domanda che quanto detto non era completo*[40]. *Allora propongo loro di ripensare allo scopo preciso dello strumento bilancia, a cosa serve, come devo usarla, e soprattutto qual è l'assetto della bilancia al momento in cui io stabilisco il peso di un oggetto sconosciuto.*
184. Duccio: Alla fine ho su un piatto un peso conosciuto e sull'altro l'oggetto sconosciuto e siccome la bilancia è in equilibrio peso e oggetto hanno lo stesso peso.
185. I: Pensa cosa potresti fare in ogni piatto oltre che togliere un peso sconosciuto, senza alterare l'equilibrio.
186. Emanuele: Potrei aggiungere uno stesso peso.
187. I: Ok, ci siete vicini, riprendete il passaggio errato di Safet e su quello ragionate:



188. *Aspetto un po' ma la situazione è sempre ferma. Decido di aiutarli un altro pochino.* Allora nella bilancia di Safet, più che togliere 4 con –4 che sappiamo non essere corretto perché pesi diversi, quali azioni potremmo compiere mantenendo l'equilibrio?
189. Emanuele: Si potrebbe aggiungere un peso da 4 su ogni piatto.
190. I: E perché proprio da 4?
191. Emanuele: Perché così si ha $42+4+4=g+g–4+4$ così rimane $42+4+4=g+g$ poi $50=2g$ e $g=25$.

---

[37] *Avrei dovuto chiedergli di spiegare meglio la sua affermazione.*

[38] *Non sapevo come aiutarli. Va benissimo così.*

[39] *È un ottimo invito a riformulare la propria argomentazione (per approfondimenti: NAV-Cap.I.3, p.62).*

[40] *Per i lettori: in questa frase l'autrice del diario collega la sua domanda (177) "Tutti convinti?" ad un genere di domande 'false amiche' (che viene illustrato in NAV-Cap.I.3, p.60) che chiamiamo 'Domande apparentemente dubitative di fatto asseverative' del tipo: "Sei proprio sicuro che si debba applicare il secondo principio di equivalenza?" o "Questo passaggio è davvero importante?". La sensibilità espressa nel commento riflette un presupposto a mio avviso decisivo: è il frutto di uno studio costante e approfondito. L'invito a studiare deriva da un principio generale:* un insegnante è un professionista che, da un lato, non dovrebbe mai smettere di farlo e, allo stesso tempo, dovrebbe porsi nella condizione di imparare dalla relazione dialettica che stabilisce con i suoi alunni. *Questa considerazione vale ancora di più quando un insegnante decide di impostare la sua attività appoggiandosi ad un progetto di didattica innovativa come il Progetto ArAl.*

192. I: Allora provate a riformulare il primo principio di equivalenza alla luce di quanto fatto ora.
193. Anna: Togliendo o aggiungendo una stessa quantità sia sul piatto di destra che di sinistra l'equilibrio non cambia.

Suona la campanella, nella prossima lezione riprenderò il discorso per far notare ai ragazzi che l'aggiungere uno stesso peso da entrambe le parti non turba l'equilibrio e questo si verifica in bilance "impossibili" dove sono presenti pesi negativi.

. .[41]

[41] *Dal diario emerge che l'insegnante, attraverso il suo percorso di formazione nell'ambito del Progetto ArAl, ha maturato la convinzione che dedicare ore intere di lezione all'analisi e alla rappresentazione di una situazione, promuovendo l'argomentazione e la discussione, in un clima sereno e costruttivo in cui l'insegnante davvero si fa da parte per dare spazio al balbettìo algebrico degli alunni, è una scelta che dà ottimi risultati, pur immaginando che quegli alunni abbiano dedicato minore tempo ad attività procedurali che prevedono calcoli, equivalenze, scomposizioni, formule ecc. ecc.*