Progetto ArAl Collaborazioni	1	Proprietà distributiva

Località	1	1	2	3	4	5	1	2	3	Insegnante/i

data 2007 1 (*uso del registratore*)

La classe è formata da 17 alunni, 5 femmine e 12 maschi. Tutti gli allievi partecipano volentieri all'attività didattica.

Primo problema

(Problemi in due versioni)

Una classe ordinata
Seconda versione

I bambini sono 10, e ciascuno ha un armadietto per i quaderni.
All'inizio dell'anno le maestre dicono: "Bambini, domani portate 3 quaderni a righe per ciascuno". 10×3
"Io so quanti sono in tutto i quaderni a righe negli armadietti" pensa Cirillo.
Il giorno dopo la maestra di matematica dice: "Servono anche 2 quaderni a quadri: li portate, per favore?" 10×2
I bambini li portano e Cirillo comincia subito a calcolare quanti sono i quaderni a quadri.
La maestra vorrebbe sapere quanti quaderni ci sono in tutto, senza contarli uno a uno.
Cirillo dice subito: "Ti aiuto io, maestra, ti dico come fare!" $10 \times 3 + 10 \times 2$

Secondo te, cosa dirà Cirillo alla maestra? $10 \times (3+2)$

GRUPPO X[1]
A[2]: 3 × 10 = 30 a righe poi 20, 50 in totalE: Quindi 3 × 10 + 2× 10 = 50
N: Oppure 5 × 10 = 50.

GRUPPO Y
Il notaio legge il testo, il relatore trova i dati, il coordinatore e l'osservatore[3] *si alzano e si avvicinano, hanno dei dubbi sul testo e poi proseguono perché anche risolvendo in modo diverso il risultato non cambia.*

GRUPPO K (R = relatore, O = osservatore, N = notaio, P = psicologo)
R: Troviamo una legenda per i dati.
Hanno evidenziato i dati con un cerchietto.
R: Sicuro che si usa una proprietà
O: Sicuro che si usa una moltiplicazione,
R: Facile
N: Scriviamo "soluzione"
R: Cirillo dirà alla maestra di fare: 10 × (3 + 2) = 50 perché i bambini sono 10 e ogni bambino ha 5 quaderni
N: Mettiamo risposta
R: Scrivilo: 10×(3+2) = 50

GRUPPO J
Leggono il testo, il notaio scrive i dati, qualcuno ha detto qual è la domanda, poi rileggono il testo.
- Per ciascuno cosa?
- Tre lei, tre tu, tre tu, tre tu[4]…

---

[1] *Sono gruppi di una pluriclasse? Quanti anni hanno gli alunni?*
[2] *Le sole iniziali impediscono di capire come si svolge il dialogo. Credo che non sia un gran problema di privacy e suggerirei nei prossimi diari di inserire i nomi.*
[3] *Non ho mai letto i lavori di Angela Pesci sull'apprendimento collaborativo, avrei bisogno di qualche sintetica informazione che mi aiuti a capire. Avete un articolo da mandarmi?* OK
[4] *L'alunno simula la distribuzione dei quaderni negli armadietti?* Sì

- 5 × 10 e lo risolvi[5]
- 50
- Sembra troppo facile
- La domanda è Cirillo dice…
- Cirillo dice che siccome i quaderni da portare sono 5, 5 × 10 = 50 quaderni

Rileggono il testo

- Per ciascun armadietto

O: Prima fai 2 × 10 e poi 3 × 10, quindi viene 50
P: Allora scriviamo questo
- soluzione 3 × 10 = 30 …

N: Non possiamo scrivere a espressione? e gli altri dicono no[6]. *Quindi continuano* 2×10 = 20. *poi hanno fatto una parentesi graffa* = 50, 5 × 10 = 50
Ritornano sul problema e dicono le due espressioni sono equivalenti.
Cirillo dice alla maestra che i quaderni in tutto sono 50, sembra troppo facilE:
Coordinatore[7]: Comunque bisogna applicare le proprietà: la proprietà distributiva.
- ognuno ha un armadietto

Disegnano alla lavagna i 10 armadietti con i 3 quaderni a righe e i 2 quaderni a quadretti.
Prima 3 quaderni a righe, 3 per ogni armadio, poi 2 a quadri, viene 50. Ma cosa ci vuole allora[8]?
. .[9]

GRUPPO A (4^-5^ primaria)

> Partire dalle rappresentazioni 1
>
> Immaginiamo di essere in contatto con un'altra classe.
> Non sappiamo quale fosse il loro problema, ma sappiamo come Mario e Franco lo hanno risolto:
>
> Mario: 5 × (3 + 8)
> Franco: (5 × 3) + (5 × 8)
>
> I due modi di risolverlo sono equivalenti?

- Ah, questo è già fatto[10]

S: Chi è che legge il testo?
E: Leggo io
S: Emma non hai letto le…
F- tra parentesi!
S: Eh le parentesi!
F: Dovevi leggerle
E: Rileggo?
F: No, ormai
S: Allora dobbiamo cercare i dati
C: 5+3+8[11]
S: Eh, infatti

---

[5] *Non colgo il legame con l'intervento precedente.*
[6] *Perché dicono no? C'è un contratto implicito per cui non lo possono fare? Perché non lo possono fare? O è una scelta dei compagni? Il contratto didattico prevede che in questa fase l'insegnante non possa intervenire?*
[7] *Il coordinatore è l'insegnante? Se fosse così, non capirei perché è lui a suggerire la proprietà. Se non fosse lui, che esito ha il suggerimento presso i compagni?*
[8] *Non colgo esattamente il dubbio dell'alunno: 'Ma cosa ci vuole allora per…?*
[9] *Le argomentazioni sono generalmente di tipo operativo e non si prestano a commenti. Sembra che gli alunni trovino il compito facile e mostrano disorientamento. Forse pensano che devono trovare semplicemente il numero totale dei quaderni.*
[10] *Non capisco a cosa si riferisca.*
[11] *C sbaglia la lettura? Legge due addizioni perché è distratto?*

F: I dati, ma dobbiamo mettere la risposta, non i dati
C: Aspetta, se i due modi sono equivalenti, cioè se sono uguali
E: Per me non sono equivalenti
S: Proviamo, aspetta
F:5×3+5×8   5×(3+8)
C: Il primo fa 16, ah no
E: No, 5×3 fa 15, +8…
S: 23[12]
C: Questo quindi viene 23
E: Franco 5×3=15, + 5×8 =40
C: 40 +15=65
F: Eh, non sono uguali
C: Non sono equivalenti
F: Allora scriviamo "secondo noi non sono equivalenti"
S: Eh, però…
F: Non va bene?
Tutti: Sì,sì
F: Sicuri?
S: Va bene
F: Secondo me non è ancora risolto, dobbiamo ancora…
C: Aspettate
S: Però le parentesi… (a bassa voce)
F: Serena, un po' più alta la voce
S: Ok, va bene
C: Ho capito! Però le parentesi servono perché dobbiamo risolvere prime il calcolo scritto tra parentesi
F: I dati non servono
C: Non ho mica detto che servono i dati, dobbiamo risolvere prime 3+8 che fa 11 e poi ×5 quindi…
D. 5×3 =15 +8, 23[13]
C: No 5×11 fa 55
F: Secondo me la risposta è così: i due calcoli non sono equivalenti perché hanno risultato diverso
E: Però il calcolo l'abbiamo fatto mentale
C: Sì.
E: Quindi non lo scriviamo[14]
C: No
F: Scriviamo qual è il risultato di uno e qual è il risultato dell'altro[15]
C: Perché uno fa 55 e l'altro fa 15+40 quindi 55
E: No fa 65
C e F: 5×8 fa 40 e 5×3 fa 15, 55,… 55…
S: Eh 55, come l'altro
C: Viene uguale 55 e 55
S: Sì sono equivalenti
C: Quindi sono equivalenti
S:e F: Sì, sì
C: Il calcolo è diverso, ma il risultato è uguale
F: È vero, qua non sono diversi, hanno gli stessi numeri
C: Quindi per noi i due calcoli sono equivalenti
S: Ma scriviamo anche il perché[16]
F: Eh infatti dobbiamo spiegare
C: perché 3+8 fa 11 e 5 ×3 fa 15
Fa. 5×11!?
C: 5×11 fa 55, 5×3 fa 15 e 5×8 fa 40 quindi 40 +15 fa 55
S: Quindi per noi i due calcoli sono uguali

---

[12] Sembra che non conoscano l'uso delle parentesi. È così o è un difetto di memoria nel gruppo?
[13] Penso sia una trascrizione simbolica di un calcolo fatto a voce alta, e non una frase scritta in modo sbagliato da D. Giusto?
[14] Il fatto di non trascrivere i calcoli mentali fa perdere la lettura del processo. Gli alunni sono liberi di comportarsi come meglio credono? Anche di fare una scelta di comodo?
[15] Sinora gli alunni sono molto legati al prodotto (il risultato) e poco al processo.
[16] Ottima proposta.

C: Equivalenti
S: Ma scriviamo anche il perché
Emma: Eh sì
C: Perché il risultato viene uguale anche se i calcoli sono diversi

GRUPPO B (1^2^3^ primaria)

S[17]: Allora vediamo, proviamo a pensare, poi dite ad alta voce. I dati non ci sono allora dobbiamo scrivere subito il calcolo.[18]
F: Adesso proviamo a fare 5×3, no 5×5, no
S: Allora 3+8 tra virgolette (intendendo "parentesi")
Sam:: ×5
F: Però le virgolette servono
S: A far vedere che fai prima quel calcolo
F: Allora 3+8, ×5
Sam:: Scrivi
S: Ma cosa fate[19]? Non dovremmo farli tutti e due (*mentalmente*) per vedere se sono uguali?
Sam:: 8+3 poi×5. Risolviamo
F: Allora facciamo una freccia e sommiamo quei due
Sam:: E sono 11 poi ×5 fa 55
Ir. Ok, fa 55
S: Adesso proviamo a fare l'altro 5×3 tra virgolette + 5×8
F: Cosa? Tra virgolette? No tra virgolette
Sam:: Sì, sì, scrivi (*ma lui apre e chiude le parentesi tonde*) 5×3 + fuori dalle virgolette 5×8. Vediamo se è uguale all'altro
Ir. Vediamo se viene 55
S: Facciamo 5×3 che fa 15 poi fai 5×8 fa 40
F: 15 +40 quindi fa 55
Sam:: 55
S: e F: sì è vero 55
S: Adesso rispondiamo "i due calcoli sono uguali"
Sam:: Equivalenti , vuol dire che sono tutti e due… come si chiama[20]…
S: Sì i calcoli sono equivalenti.

GRUPPO B (1^2^3^ primaria) – **(primo problema)**
F legge il testo
S: Allora adesso lo risolviamo
Sam:[21]: Voi me lo dettate[22] e io scrivo
S: Va bene
Sam: Ma lo scriviamo tutto o facciamo tutto…

---

[17] *Qui S sembra essere l'insegnante, o comunque un adulto.*
[18] *L'intervento dell'insegnante mi lascia interdetto. Non so cosa intenda per 'dati'. Le informazioni che – attraverso due linguaggi, il naturale e il matematico – vengono fornite nel testo cosa sono, se non 'dati'? Il testo nel suo insieme è un complesso 'condensato di dati'. C'è poi un aspetto molto più delicato. La consegna chiede: 'I due modi di risolverlo sono equivalenti?' Si tratta di una consegna a livello* metacognitivo, *che richiede cioè una* riflessione *sui due oggetti matematici per stabilire la loro eventuale equivalenza. L'insegnante sposta invece l'attenzione sul* calcolo, *che richiede una prestazione a livello* cognitivo. *Se chiedo all'alunno: 'Quanto fa 11 + 3? E 20 – 6?' La risposta corretta è: 14 e 14. Ma è ben diverso chiedergli: '11 + 3 e 20 – 6 sono equivalenti?' perché in questo caso si alza il livello di complessità del problema: l'alunno non deve fermarsi al livello del calcolo, ma spostarsi ad un livello concettuale superiore, e* verificare l'equivalenza *fra i due oggetti matematici; verificare cioè se sono* rappresentazioni dello stesso numero. *La risposta in questo caso è 'Sì, perché…'*
[19] *Perché non possono scrivere?*
[20] *Forse sarebbe stato meglio aiutare Sam a trovare la parola che gli mancava.*
[21] *Sam, F, S, … sono gli stessi del gruppo A?*
[22] *Cosa dovrebbero dettare? La parte scritta in linguaggio matematico?*

S: Ma forse i dati è meglio[23]
I: Chi è che detta?
Sam: Sara dai
F: Parti da risolvo[24]
S: Parti da risolvo, partiamo dai dati
F: Facciamo subito il calcolo[25]
S: O andiamo a ricercare i dati?, Beh dai li scriviamo
F: 10 sono i bambini, 3 quaderni a righe per ciascun bambino
I. 2 quaderni a quadri
S: Se vogliamo scrivere ancora per ciascun bambino,
Sam: No, scriviamo solo a quadri
S: Poi il calcolo
F: Ovviamente il calcolo, facciamo tra parentesi perché bisogna fare 3+2
Sam: 10 sono i bambini
S: Vediamo 3×10 + 2…
Sam: Allora aspetta: pensiamolo, ognuno pensa a come possiamo fare questo calcolo, e poi lo diciamo ad alta voce uno alla volta
Sam: Forse mi è venuto: devi fare 3×…
I. A me forse è venuto
Sam: E allora ditelo
I. 3+2, × 10
S: Allora ok scrivi
F: Apri la parentesi
Sam: È vero, 3+2, chiudo la parentesi, poi per 10 =[26]
Sam: Facciamo la freccetta sotto [27]perché così sommiamo questi due che fa 5 e adesso dobbiamo fare × 10 e poi =
S: 50 e poi dopo rispondiamo
S: Rileggi di nuovo la domanda
F: 'Secondo te cosa dirà Cirillo alla maestra?' Cirillo dirà alla maestra che in tutto ci sono 50 quaderni
S: Però dobbiamo dire come fare
F: Sì
Sam: Però dobbiamo finire la risposta
I. Cirillo dirà alla maestra che ci sono 50 quaderni
S: Però guarda cosa chiede Cirillo dice subito ti aiuto io maestra, ti dico come fare
Sam: Allora beh… praticamente lui deve fare 3+2, × 10
S: Allora deve fare 3+2 che fa 5 poi per 10 = 50
F: Devi fare il calcolo tra parentesi poi dopo per 10
Sam: Sommi i due addendi che fa 5 poi per 10 = 50
I. Allora adesso Cirillo dirà che in tutto ci sono 50 quaderni nella scuola[28]
Sam: Ok.

---

[23] *Ricompaiono i 'dati'. Però negli interventi successivi non riesco a trovare cosa scrivano gli alunni, quindi non mi è chiaro cosa cerchino. Ho l'impressione che essi confondano i due piani (v. Commento 18): i 'dati' ai quali puntano (numero degli armadietti, dei quaderni, ecc) servono in realtà per fare le* operazioni *che permettono di trovare il* numero totale *dei quaderni. Ma non è questo il 'vero' livello al quale devono essere guidati a lavorare. Quello del calcolo è, per così dire, un livello di transito'. Il vero livello è, ancora una volta* metacognitivo*: mettersi nei panni di Cirillo e capire come farebbe. Come dire: è Cirillo che ha usato i 'dati', si tratta di capire* come *li ha usati. Qui invece sembra che Cirillo evapori e il centro del problema, per gli alunni, sia* fare calcoli.

[24] *Mi pare una conferma di quello che ho scritto prima. Gli alunni sembrano allinearsi ad uno stereotipo: parto dai dati, scrivo 'Risolvo', ecc*

[25] *Posizione tipica, soprattutto per i più 'svelti': scavalcare dati, risolvo (dettagli tutto sommato superflui in questo caso di un problema 'facile') e passare subito ai* calcoli, *vero obiettivo implicitamente* condiviso.

[26] *Perché scrivono* l'uguale? *Anche questo dei diversi significati dell'uguale è un aspetto fondamentale che va affrontato prima possibile. Consiglio la lettura del termine 'Uguale' nel Glossario ArAl.*

[27] *La freccetta è una metafora delle parentesi? Ma prima non hanno deciso di usarle su suggerimento di F? Perché la freccetta? Il contratto didattico lo prevede o è una scelta di Sam?*

[28] *In realtà, come ho già sottolineato, non è la risposta coerente con la consegna. Per gli alunni il* prodotto *(cioè il risultato) è più importante del* processo. *Bisognerebbe che si accostassero a questo diverso punto di vista, che permette di superare la logica aritmetica del* calcolare *in favore della logica algebrica del* rappresentare. *Consiglio la lettura sul Glossario dei termini:* processo/prodotto, rappresentare/risolvere, opaco/trasparente.

Secondo problema

> *Partire dalle rappresentazioni 1*
>
> Immaginiamo di essere in contatto con un'altra classe.
> Non sappiamo quale fosse il loro problema, ma sappiamo come Mario e Franco lo hanno risolto:
>
> Mario: $5 \times (3 + 8)$
> Franco: $(5 \times 3) + (5 \times 8)$
>
> I due modi di risolverlo sono equivalenti?

GRUPPO X:
Si legge
- Per vedere se sono uguali dobbiamo prima calcolare
B: sottolinea
-Vengono chiesti i due modi, non i risultati[29]
Cercano un altro esempio
-Si può anche fare 5×8=40 +5×3=15
-Danno lo stesso risultato, ma sono risolti in modi diversi
-Facendo 8×3+5×5[30] viene diverso
- Non si può fare 8×3e5×5
- Ho capito: i numeri sono gli stessi, ma uno fa prima 5×3 e poi 5×8
-Si prende l'ultimo numero delle parentesi per il primo
- 5×5 e 3×8 non si possono fare perché sono due parentesi diverse
- Non vuol dire che prendendo da parentesi diverse non venga lo stesso risultato
-.Non si può fare perché nel calcolo di Mario c'era 3+8 e non 3×8
- I numeri sono gli stessi, ma sono moltiplicati in modo diverso
-Hanno aggiunto il 5 per fare il risultato uguale
- In quella di Franco si può usare la proprietà commutativa e non quella di Mario[31]
- La domanda ci fa venire dei dubbi.
- Sì, i due procedimenti sono equivalenti, ma hanno usato proprietà diverse
- Viene usata la proprietà distributiva, quindi non cambia niente[32]
- Il 5 viene riportato nelle due parentesi e il 3 e l'8 vanno uno in una parentesi e l'altro nell'altra, quindi non cambia niente

GRUPPO Y
Svolgono le operazioni
-Il risultato è uguale, le procedure diverse
Analizzano le soluzioni del testo, si chiedono se è lo stesso problema. Qualcuno parla di proprietà invariantiva.

GRUPPO K

Il relatore detta al notaio le operazioni da fare 5×11. Il relatore dice: ah! ci sono! qui hanno usato l'invariantiva.

---

[29] *Ottima osservazione. Non mi è chiaro un aspetto: quando interviene l'insegnante? In questi diari sono molto interessanti i dialoghi fra pari, e credo che questa sia la conseguenza positiva del metodo che state seguendo dell'apprendimento collaborativo. Ma sarebbe altrettanto interessante leggere anche altre modalità, nelle quali l'insegnante svolga per esempio un ruolo di mediatore, attraverso le quali possano esplicitarsi salti di qualità, richieste di riflessione, e altro che, senza l'insegnante, non possono manifestarsi.*
[30] *Sarebbe interessante approfondire con l'alunno le ragioni del suo intervento, non credo che sia del tutto insensato.*
[31] *Anche questa osservazione si presta a sviluppi interessanti. Nella frase di Mario è sì possibile applicare la proprietà commutativa alla moltiplicazione, ma quello che non rende evidente questa possibilità è che il secondo numero è rappresentato in forma* non canonica *(3 + 8). Consiglio la lettura sul Glossario del termine* canonica / non canonica (rappresentazione, forma).
[32] *Chi la fa questa affermazione così all'improvviso, un alunno? L'insegnante?*

GRUPPO J

- Un po' di diverso c'è perché… è diverso
- Prova a farlo
- Il primo fa 55, il secondo (5×3)+(5×8)=15+40=55 sono uguali

-La due espressioni sono equivalenti

Richiamano la proprietà distributiva e dicono

- Mi sa che dobbiamo applicarla[33] come nell'altro problema (problema n.1)
- È la stessa cosa di questo problema, è uguale a questo problema

DISCUSSIONE SCUOLE MEDIE

Primo problema

- La maestra vorrebbe sapere quanti quaderni ci sono in tutto: 10 sono i bambini, 3+2 cioè 5 i quaderni e moltiplicando 10×5 si ottiene il risultato.
- Prima ho moltiplicato i quaderni a righe e il secondo giorno i quaderni a quadretti, abbiamo fatto al giorno e poi abbiamo sommato.

Prof: Sarà diverso?

- Nooo, però ci sarà un procedimento più lungo e più corto
- Qualcuno ha messo insieme i quaderni e qualcuno ha messo insieme dopo

Prof: ma cosa vuol dire spiegare alla maestra?

- Vuol dire che calcoli fare?
- Gli altri: nooo. Vuol dire come fare a risolvere!

Secondo problema

- Prima abbiamo pensato che erano due cose diverse perché in una c'è la moltiplicazione e in una c'è l'addizione, poi abbiamo risolto i due calcoli e tutti e due facevano 55 e quindi voleva dire che i due modi usati sono equivalenti

Prof: Allora tutti i modi in cui viene 55 sono equivalenti

- No
- È proprio il calcolo che è uguale: Fare 5× (3+8) è come fare 5×3 prima + 5×8 poi. È la proprietà invariantiva[34] perché il 5 non cambia. È diverso però che fare (5×5) + (3×8) perché non puoi distribuire il 5[35], l'8 e il 3 in modo diverso, perché c'è un ordine, non puoi scambiare, 5×5 e 8+3 = 25+24 e invece 5×3 +8×5 = 55

DISCUSSIONE SCUOLE PRIMARIE

Primo problema

I bambini confrontano i due modi diversi di risolvere il problema, inizialmente i bambini del gruppo B pensano di aver sbagliato, in quanto i grandi lo hanno risolto in un altro modo. Il gruppo A subito si accorge che entrambi i modi sono corretti e spiegano:

- Noi abbiamo contato prima tutti i quaderni a righe e poi tutti quelli a quadretti

Il gruppo B, invece, spiega che hanno messo insieme i quaderni a righe e i quaderni a quadretti di ciascun bambino e poi hanno ripetuto per 10 bambini.

Il gruppo A afferma, allora, che era possibile risolvere il problema con due soluzioni, ma a loro non è venuto in mente subito.

Secondo problema

I bambini del gruppo A spiegano che inizialmente non avevano tenuto conto delle parentesi e stavano per dare la soluzione sbagliata. Poi per fortuna qualcuno si è ricordato che le parentesi sono importanti perché ti dicono che prima devi fare quel calcolo.

I bambini del gruppo B, invece, spiegano che loro quello l'avevano capito subito e non hanno avuto problemi a capire che entrambi i calcoli davano come soluzione 55.

. .[36]

---

[33] *Cosa intendono per 'applicarla'? Qui non si tratta di* applicarla, *ma di* riconoscerla. *Non capisco perché la proprietà emerga quasi di straforo alla fine e non sia stata riconosciuta subito. Probabilmente mi sfugge qualcosa.*

[34] *Attenzione che la proprietà invariantiva si applica solo alla sottrazione e alla divisione.*

[35] *È opportuno precisare alla classe che si distribuisce* l'operazione, *non il numero.*

[36] *La sinteticità dei riassunti dei diari e delle discussioni non consentono letture significative di ciò che è accaduto in classe. È proprio nel confronto delle due rappresentazioni e delle sottostanti percezioni, e nella scoperta della loro equivalenza, che si gioca l'approccio alla proprietà distributiva.*